

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
(ΘΕΜΑΤΑ Α, Β, Γ)

A1.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παραγούσα της f στο Δ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R},$$

είναι παραγούσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παραγούσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παραγούσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

- Έστω G είναι μια άλλη παραγούσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, άρα

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta \quad \blacksquare$$

A2.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \neq f(b)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

A3.

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακορυφή ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

A4.

ΣΩΣΤΟ / ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ / ΛΑΘΟΣ / ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3, \alpha \in \mathbb{R}$$

B1] Αφοί f παραγωγίσιμη (απολυμνήσιμη) με

$$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2\alpha x + 9$$

ή το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$

από 0-Fermat πρέπει $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Rightarrow$

$$2\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -6$$

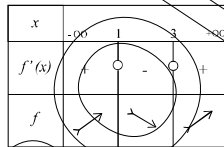
$$\text{Για } \alpha = -6 \text{ έχουμε } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

B2] $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$



Έστω $A_1 = (-\infty, 1)$

$A_2 = [1, 3]$

$A_3 = (3, +\infty)$

• $f(A_2) = f([1, 3]) \stackrel{f \uparrow}{=} [f(1), f(3)] = [-3, 1]$

Αφού $0 \in f([1, 3])$ ή $f \uparrow$ σε $[1, 3]$ υπάρχει

1 μόνο x_2 ως $f(x_2) = 0$ στο $[1, 3]$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f		↗	↘	↗	

- $f(A_3) = f((3, +\infty)) \stackrel{f \uparrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-57, +\infty)$

Άρα $0 \in f(A_3)$ ή $f \uparrow$ σε A_3 υπάρχει 1 μόνο πηλ x_3
 με $f(x_3) = 0$ σε $A_3 = (3, +\infty)$

- $f((0, 1)) \stackrel{f \uparrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)) = (-3, 1)$

Άρα $0 \in f((0, 1))$ ή $f \uparrow$ σε $(0, 1)$ υπάρχει 1 μόνο
 πηλ $x_1 \in (0, 1)$ με $f(x_1) = 0$

Άρα $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in [1, 3]$ ή $x_3 \in (3, +\infty)$ η
 Ότι $f(x) = 0$ έχει 3 διαφορετικές σημειώσεις

B3 $f'(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f			

f κοίτη ($\cap$) σε $(-\infty, 2]$

f κυρτή ($\cup$) σε $[2, +\infty)$

6 η με f είναι το $\Sigma(2, f(2)) = \boxed{\Sigma(2, -1)}$

B4 16x06 $g(x) = x + f(x)$ ①, $x \in \mathbb{R}$ ή $g'(x) = 1 + f'(x)$ ②, $x \in \mathbb{R}$
 ε_1 ως φ σε $A(7, f(7))$

$$\varepsilon_1: y - f(7) = f'(7)(x - 7) \text{ ή } \varepsilon_1: y = f'(7)x + f(7) - 7f'(7)$$

$$\varepsilon_2 \text{ ως } \varphi \text{ σε } B(7, g(7))$$

$$\varepsilon_2: y - g(7) = g'(7)(x - 7) \text{ ή } \varepsilon_2: y = g'(7)x + g(7) - 7g'(7)$$

Τα 6 κομμάτια των ε_1 ή ε_2 προσαρμόζονται

$$f'(7)x + f(7) - 7f'(7) = g'(7)x + g(7) - 7g'(7) \Rightarrow$$

$$f'(7)x + f(7) - 7f'(7) = (1 + f'(7))x + 7 + f(7) - 7(1 + f'(7))$$

$$\cancel{f'(7)x} + \cancel{f(7)} - \cancel{7f'(7)} = \cancel{x} + \cancel{f'(7)x} + \cancel{7} + \cancel{f(7)} - \cancel{7} - \cancel{7f'(7)}$$

$$x = 0$$

οπότε $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συμπίπτουν σε y

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \ln x) = e^0 \cdot \ln 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [e^x \cdot \frac{\ln x}{x}] = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x})}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ |x| = x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$\Gamma 2$. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πρῶτος συνεχών.

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει

κατακόρυφο ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x \cdot \frac{\ln x}{x}] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{γὰρ: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$|\frac{\ln x}{x}| \leq |\frac{1}{x}| \Leftrightarrow -|\frac{1}{x}| \leq \frac{\ln x}{x} \leq |\frac{1}{x}|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-|\frac{1}{x}|) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} |\frac{1}{x}|$$

$$\text{Από κρ. Παρεμβολής: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \overset{1}{\cancel{0}} \cdot x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \mu x) = 0 = \theta \in \mathbb{R}$$

$$\text{για: } -1 \leq \mu x \leq 1 \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \mu x \leq e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$$\text{Από κρ. Παρεμβολής: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \mu x) = 0$$

Η ευθεία $y = 0$ είναι ορ. άσυμπτωτο στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\overset{1}{\cancel{x}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x}}} \left(\frac{x \rightarrow +\infty}{|x|=x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{1+0} = 1 = \theta \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \overset{1}{\cancel{0}} \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + x}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{x^2+x}} - \overset{1}{\cancel{x^2}}}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x}} + x} \left(\frac{x \rightarrow +\infty}{|x|=x} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overset{1}{\cancel{x}}}{\overset{1}{\cancel{x}} \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} = \theta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγιο άσυμπτωτο στο $+\infty$.

$$\Gamma 3. \text{ Έστω } g(x) = f(x) - (x + \frac{1}{2}) = e^x \cdot \mu x - x - \frac{1}{2}$$

• Η g συνεχής στο $[-n, 0]$ ως ηράτης συνεχών.

$$g(-n) = e^{-n} \cdot \mu(-n) - (-n) - \frac{1}{2} = e^{-n} + n - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \cdot \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$\bullet g(-n) \cdot g(0) < 0$$

Από Θ. Βολταόου η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$

έχει μια μοναδική ρίζα στο $(-n, 0)$.

Γ4. $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) \geq 0$ και $x'(t) > 0$

$$y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Για $t = t_0$: $y'(t_0) = \frac{2 \cdot x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2 \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad (y'(t_0) = x'(t_0)) \quad \Leftarrow \Rightarrow$

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot [2 \cdot x(t_0) + 1]}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad : x'(t_0) > 0 \quad \Leftarrow \Rightarrow$$

$$1 = \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad \Leftarrow \Rightarrow$$

$$2 \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2 \cdot x(t_0) + 1$$

Άρα $4 \cdot [x^2(t_0) + x(t_0)] = [2 \cdot x(t_0) + 1]^2 \quad \Leftarrow \Rightarrow$

$$4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) = 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) + 1 \quad \Leftarrow \Rightarrow$$

$$0 = 1 \quad \text{Αδύνατο}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 .