ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε το $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y=f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1, Β2, Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0, x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=\pi$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f(x)\right)+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 262.
Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 141.
Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 246-247.
Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Η συνάρτηση f ως ρητή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2},x\in\mathbb{R}.$$

Β1. Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x>0$

• Η f στο $(-\infty,0]$ είναι συνεχής και $f'(x)<0,x\in(-\infty,0)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

• Η f στο $[0,+\infty)$ είναι συνεχής και $f'(x)>0,x\in(0,+\infty)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f στο $x_0=0$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $f(0)=0$, δηλαδή $f(x)\geq f(0)=0,x\in\mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}=1$.

- Όταν $x\in(-\infty,0]$ η f συνεχής και γν. φθίνουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,1)$.
- Όταν $x\in[0,+\infty)$ η f συνεχής και γν. αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,1)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι $[0,1)$, δηλαδή η f έχει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο το $f(0)=0$ και <u>δεν</u> έχει μέγιστο.

B2. Η $f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}, x\in\mathbb{R}$ ως ρητή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)\left[x^2+1-4x^2\right]}{(x^2+1)^4}=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}, x\in\mathbb{R}.$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x^2={}^1\!/_3\Leftrightarrow x=\pm{}^{\sqrt{3}}\!/_3$.

$f''(x)>0\Leftrightarrow 1-3x^2>0\Leftrightarrow x\in\left(-{}^{\sqrt{3}}\!/_3, {}^{\sqrt{3}}\!/_3\right)$.

• Στο $x_1=-{}^{\sqrt{3}}\!/_3$ ως παρ/μη η f δέχεται εφαπτομένη άρα το $A\left(-{}^{\sqrt{3}}\!/_3, f\left(-{}^{\sqrt{3}}\!/_3\right)={}^1\!/_4\right)$ είναι σημείο καμπής.

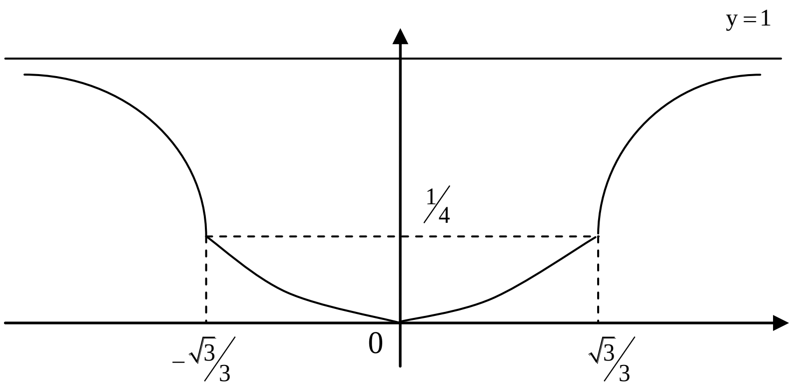
• Στο $x_2={}^{\sqrt{3}}\!/_3$ ως παρ/μη η f δέχεται εφαπτομένη άρα το $B\left({}^{\sqrt{3}}\!/_3, f\left({}^{\sqrt{3}}\!/_3\right)={}^1\!/_4\right)$ είναι σημείο καμπής.

- Όταν $x\in\left(-\infty,-{}^{\sqrt{3}}\!/_3\right]$ η f συνεχής και $f''(x)<0$ στο $\left(-\infty,-{}^{\sqrt{3}}\!/_3\right)$, άρα η f κοίλη στο $\left(-\infty,-{}^{\sqrt{3}}\!/_3\right]$
- Όταν $x\in\left[-{}^{\sqrt{3}}\!/_3, {}^{\sqrt{3}}\!/_3\right]$ η f συνεχής και $f''(x)>0$ στο $\left(-{}^{\sqrt{3}}\!/_3, {}^{\sqrt{3}}\!/_3\right)$, άρα η f κυρτή στο $\left[-{}^{\sqrt{3}}\!/_3, {}^{\sqrt{3}}\!/_3\right]$
- Όταν $x\in\left[{}^{\sqrt{3}}\!/_3, +\infty\right)$ η f συνεχής και $f''(x)<0$ στο $\left({}^{\sqrt{3}}\!/_3, +\infty\right)$, άρα η f κοίλη στο $\left[{}^{\sqrt{3}}\!/_3, +\infty\right)$.

B3. Η f ως συνεχής στο $\mathbb{R}$ <u>δεν</u> έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Β4.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		0		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
f''		-	0	+		+	0	-	
f'		-		-	0	+		+	
f		Κοίλη και γν. φθίνουσα		Κυρτή και γν. φθίνουσα		Κυρτή και γν. αύξουσα		Κοίλη και γν. αύξουσα.	



<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Έστω $\Lambda(x)=e^x-x-1, x\in\mathbb{R}$. Είναι $\Lambda(0)=e^0-0-1=0$ και η Λ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\Lambda'(x)=e^x-1, x\in\mathbb{R}$.

$$\Lambda'(x)=0\Leftrightarrow e^x=1\overset{e^x\,1-1}{\Leftrightarrow}x=0$$

$$\Lambda'(x)>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\overset{e^x\,\gamma\nu.\uparrow}{\Leftrightarrow}x>0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Λ'		$-$	0	$+$	
Λ		↘		↗	

Επομένως $\Lambda(x)\ge\Lambda(0), x\in\mathbb{R}$,
η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
Άρα το 0 μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\Lambda(x)=0$.

ΟΛ. ΕΛ. το Λ(0) =0

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται $\Lambda(x^2)=0$ άρα από το προηγούμενο $x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Γ2. Είναι $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ και $f(0)=0$.

Η f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ είναι συνεχής και $\neq 0$ άρα σε καθένα από αυτά διατηρεί σταθερό πρόσημο επομένως οι δυνατοί τύποι της f είναι:

- $f(x)=\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\overset{\Gamma_1}{=}e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$

ή • $f(x)=-\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|\overset{\Gamma_1}{=}1+x^2-e^{x^2}, x\in\mathbb{R}$

ή • $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|=e^{x^2}-x^2-1, x\geq 0\\ -\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|=1+x^2-e^{x^2}, x<0\end{cases}$

ή • $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=-\left|e^{x^2}-x^2-1\right|=1+x^2-e^{x^2}, x\geq 0\\ \sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2}=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|=e^{x^2}-x^2-1, x<0\end{cases}$

Γ3. Είναι $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$. Η f ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right), x\in\mathbb{R}$. Η f' ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=4x^2\cdot e^{x^2}+2e^{x^2}-2$, $f'''(x)=4x\cdot e^{x^2}\cdot\left(2x^2+3\right)$

$f'''(x)=0\Leftrightarrow x=0$, για $x>0$, $f'''(x)>0$, άρα $f''(x)$ γν. αύξουσα δηλαδή $f''(x)>f''(0)=0$ και για $x<0$, $f'''(x)<0$, άρα $f''(x)$ γν. φθίνουσα δηλαδή $f''(x)>f''(0)=0$. Η $f''(x)$ συνεχής στο 0 άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x), x\in[0,+\infty)$.
Είναι: $g'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

$0\leq x<x+3\overset{f'\,\text{γν.αύξουσα}}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x+3)$, άρα $g'(x)>0$ στο $[0,+\infty)$ δηλ. η g είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1-1$. Η δοσμένη εξίσωση γίνεται: $g(|\eta\mu x|)=g(x)\Rightarrow|\eta\mu x|=x, x\geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Είναι $\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx=\pi$

$$\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - \left\{\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)(-\eta\mu x)dx\right\} = \pi$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - \left(f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi - f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right) - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = \pi$$

$$\Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \; \mathbf{(1)}$$

Έστω $\kappa(x) = \dfrac{f(x)}{\eta\mu x}, \eta\mu x \neq 0$

τότε $\left.\begin{array}{l} f(x) = \eta\mu x \cdot \kappa(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} \eta\mu x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \kappa(x) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \overset{f\sigma\upsilon\nu.}{=} f(0)$ **(2)**

Από **(1), (2)** είναι $f(0) = 0$ και $f(\pi) = \pi$ και

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\kappa(x) = 1\cdot 1 = 1.$$

<u>2^ος τρόπος</u>

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x} \underset{D.L.H.}{\overset{\%}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x} \overset{f'\sigma\upsilon\nu.}{=} \frac{f'(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = f'(0).$$

Δ2. α) Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ **(1)**, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και τα 2 μέλη της **(1)** είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, παραγωγίζω και έχω:
$f'(x)e^{f(x)} + 1 = f'(f(x))f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$ **(2).**
Υποθέτουμε ότι η f στο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο τότε αφού είναι παραγωγίσιμη από θ.Fermat $f'(x_0) = 0$
Η **(2)** για $x = x_0$ δίνει $1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$, όμως $f'(0) = 1$ άρα άτοπο, επομένως η f στο $\mathbb{R}$ <u>δεν</u> παρουσιάζει ακρότατα.

β) Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη) και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $f'(0) = 1 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Η f στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και γν.αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) \overset{\Upsilon\pi o\theta.}{=} (-\infty, +\infty)$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\dfrac{2}{|f(x)|}$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{2}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{|f(x)|} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{2}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|f(x)|}=0 \end{array}\right\}\underset{\pi\alpha\rho.}{\overset{\kappa\rho\iota\tau.}{\Longrightarrow}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0.$$

Δ4. $I=\displaystyle\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx \overset{\ln x=u\Rightarrow\frac{1}{x}dx=du}{\underset{\text{όταν}\ x=e^\pi,\ u=\pi}{\underset{x=1,\ u=0}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}}\int_0^\pi f(u)\,du.$

Είναι $0\le u\le\pi \overset{f\,\gamma\nu.\uparrow}{\Longrightarrow} f(0)=0\le f(u)\le\pi$

άρα $\displaystyle\int_0^\pi 0du<\int_0^\pi f(u)du<\int_0^\pi \pi du\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(u)du<\pi[u]_0^\pi=\pi^2.$

Δηλαδή $\displaystyle 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$

Επιμέλεια:

Σ. ΚΟΥΤΣΟΥΒΕΛΗΣ – Π. ΛΥΓΚΩΝΗΣ – Μ. ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ - Δ. ΝΤΖΟΥΡΟΠΑΝΟΣ