

Απαντήσεις στα Μαθηματικά Προανατολισμού
Νέο Σύστημα

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 76

A2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 104

A3. α) ΨΕΥΔΗΣ

β) Σχολικό Βιβλίο Σελ. 136

A4) α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{D}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$\Delta_f = (1, +\infty)$$

$$g(x) = e^x$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{B}_1. \quad D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{D} \mid x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^x > 1\} \\ &= (0, +\infty) \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{g(x)-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$B_2. (f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}, \quad x > 0$$

Η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη

στο $(0, +\infty) \quad \forall \epsilon$

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - (e^x + 2) \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = \frac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}} - 2e^x}{(e^x - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0, \quad \forall x > 0$$

Η $(f \circ g)(x)$ είναι γν. φθίνουσα

στο $(0, +\infty)$ άρα $2-1$ άρα

υπάρχει η αντίστροφη $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$D_{(f \circ g)^{-1}} = (f \circ g) (D_{f \circ g}) = (f \circ g) \left((0, +\infty) \right) \underline{\underline{f \circ g}}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g, \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g \right) = (1, +\infty)$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ D.L.H

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x + 2)'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

και για $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

$$\mu \epsilon \lim_{x \rightarrow 0^+} f \circ g = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$\text{είναι } D_{f \circ g^{-1}} = (1, +\infty)$$

Για $x > 0$ και $y > 1$

$$\text{Θέτουμε } y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (e^x - 1) = e^x + 2 \Leftrightarrow y e^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y e^x - e^x = 2 + y \Leftrightarrow (y - 1) e^x = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} y-1 \neq 0 \\ y > 1 \end{array} \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \xrightarrow[\frac{y+2}{y-1} > 0]{y > 1} x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f \circ g^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right), \text{ οπότε}$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

B3.

$$f(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \text{ π.φ.α.μ.}$$

στο $(1, +\infty)$ ως συνάρτηση π.φ.α.μ. γι' αυτό
σωαφρ.μ.β.φ.μ $\mu \in \varphi'(x) = \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right]' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)' \cdot (x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1 - x-2}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{-3x+3}{(x+2) \cdot (x-1)^2}$$

Για $x > 1 \Leftrightarrow -3x+3 < 0$ και $x+2 > 0$ και
 $x-1 > 0$ \Rightarrow έπεται $\varphi'(x) < 0$

Επομένως η φ γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

B4.

• Για $x > 1$ έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)$$

Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$ με $x > 1$

Καθώς $x \rightarrow 1^+$ το $u \rightarrow +\infty$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+2}{x-1} \right)$

Θέτουμε $u = \frac{x+2}{x-1}$, με $x > 1$

Καθώς $x \rightarrow +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1$ άρα το $u \rightarrow 1$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln(u) = \ln 1 = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \beta \omega x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \lambda > 0$$

Τ₁. Η f συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ άρα

συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x < 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) =$

$$= 1 - \ln \lambda \quad (1)$$

Για $x > 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \beta \omega x) =$

$$= 0 + \lambda \cdot 1 = \lambda \quad (2)$$

$f(0) = 1 - \ln \lambda$. $\exists \alpha \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \begin{matrix} n(1) \\ n(2) \end{matrix} \quad 1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0, \lambda > 0$$

Θέτουμε $g(\lambda) = \ln \lambda + \lambda - 1, \lambda > 0$

Η g παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$ άρα και

συνεχώς $\forall \lambda \in g(\lambda) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$

Προφανώς είδα $\lambda_0 = 1$

Είναι $g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0$ για $\lambda > 0$

Η g γ. αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

$1-1$ άρα $\lambda = 1$ μοναδική.

T_2 . Για $\lambda = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \theta \omega x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x} \cdot 1}{x \cdot (1-x)} = 1$$

Για $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x + 6x - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{7x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x - 1}{x} = 1 + 0 = 1$$

Είπυλ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

Έπαιλ $f'(0) = 1$

$$\lambda = \epsilon\varphi\omega = f'(0) = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \omega = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άρα $\omega = \frac{\pi}{4}$.

T₃. Για $x < 0$ η f παραγωγισίμη

$$\mu \in f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = - \frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Για $x = 0$ $f'(0) = 1$

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ η f παραγωγισίμη με

$$f'(x) = (m\mu x + \beta\omega x)' = \beta\omega x - m\mu x$$

Αρα

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \beta\omega x - m\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

• Για κάθε εσωτερικό σημείο του

$(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ ορίζεται η $f'(x)$ άρα

αναζητούμε κρίσιμα σημεία όπου $f'(x) = 0$

Σελίδα



Για $x < 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

αρα δεν υπάρχουν κριτικά ^{σημεία} για $x < 0$

Για $x = 0$ είναι $f'(0) = 1 \neq 0$

Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ θεωρούμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 6\cos x - \pi \sin x = 0 \Leftrightarrow 6\cos x = \pi \sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi \sin x = \pi \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + x \quad (\text{ΑΔΙΩΔΗΜ}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Είναι

$$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < k\pi < \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4} \Leftrightarrow k=0 \text{ ή } k=1$$

Για $k=0$ είναι $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Για $k=1$ είναι $x_1 = \frac{5\pi}{4}$

Επομένως τα κρίσιμα σημεία είναι

$$A\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\rho\frac{\pi}{4} + 6\omega\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ή } A\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$$

$$\text{και } B\left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right), \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \eta\rho\frac{5\pi}{4} + 6\omega\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}$$

$$B\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$$

. Για $\alpha \leq 0$

4. Η εφαπτομένη της f στο M
είναι: $(\epsilon) y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

Η (ϵ) τέφνει τον άξονα x στο x_B και
τον άξονα y στο $y = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -f(\alpha) = f'(\alpha)(x_B - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \cdot (x_B - \alpha) \quad \alpha \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(1-\alpha) = x_B - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 + \alpha = x_B - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_B = 2\alpha - 1$$

$$B(2\alpha - 1, 0)$$

α' φάση.

$$X_B(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_B'(t) = 2\alpha'(t) = 2 \cdot \left(-\frac{\alpha(t)}{3} \right) = -\frac{2\alpha(t)}{3}$$

$$\xrightarrow{t=t_0} X_B'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} = -\frac{2}{3}(-1) = \frac{2}{3}$$

β' φάση

$$\frac{dX_B}{dt} = \frac{dX_B}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 2 \cdot \left(-\frac{\alpha(t)}{3} \right) = +\frac{2}{3}$$

Δ₁

$$f(x) = e^x + x^2 - e \cdot x - 1$$

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα η f' γν. αύξουσα στο \mathbb{R} .
- Η f' συνεχώς στο $[0, 1]$
- $f'(0) = e^0 + 2 \cdot 0 - e = 1 - e < 0$
 $f'(1) = e + 2 - e = 2 > 0 \quad \rightarrow f'(0) \cdot f'(1) < 0$

Άρα από Θ. Βολζανο υπάρχει ένα τουλ. $x_0 \in (0, 1)$: $f'(x_0) = 0$

Για κάθε $x > x_0 \xrightarrow{f'} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Για κάθε $x < x_0 \xrightarrow{f'} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	\nwarrow	τ.ε	\nearrow

Για κάθε $x > x_0$ $\begin{matrix} f \uparrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$ $f(x) > f(x_0)$

Για κάθε $x < x_0$ $\begin{matrix} f \downarrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$ $f(x) > f(x_0)$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq f(x_0)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει στο x_0
ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1$

Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0. \quad \textcircled{1}$$

Άρα $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 =$
 $= x_0^2 - (e+2) \cdot x_0 + e - 1.$

$$\Delta_2 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] \right\}$$

• Για $x > x_0$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$$

Απο Δ_2 για $x > x_0$ η $f'(x) > 0$ σε μια περιοχή κοντά στο x_0 .

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = +\infty.$$

$$\rightarrow -1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(x - x_0) \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \cdot (x - x_0) \leq x - x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [-(x-x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x-x_0) = 0$$

Απο κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[(x-x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] = 0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left\{ \frac{1}{x-x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} + (x-x_0) \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \right] \right\} =$$

$$= (+\infty) \cdot [(+\infty) + 0] = +\infty.$$

• Για $x < x_0$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x-x_0} = -\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = a$$

Απο Δ1 για $x < x_0$ η $f'(x) < 0$ σε μια περιοχή κοντά στο x_0 .

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = -\infty$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[(x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = 0.$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\} =$$

$$= (-\infty) [(-\infty) + 0] = +\infty.$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\} = +\infty$$

Δ3

Θεωρώ συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$,
 $x \in [x_0, 1]$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$

ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Γιγίαι $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = 0 + 1 - x_0 > 0$
διότι $x_0 < 1$

και $g(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 \stackrel{\Delta_1}{=} 0$
 $= x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Βρίσκω πρόσημο τριωνύμου

$$x^2 - (e+2)x + e - 1 \quad (\text{I})$$

$$\Delta = (e+2)^2 - 4(e-1) = e^2 + 4e + 4 - 4e + 4 = e^2 + 8$$

Τότε $x_{1,2} = \frac{e+2 \pm \sqrt{e^2+8}}{2}$

Με $x_1 = \frac{e+2 + \sqrt{e^2+8}}{2} > 1$

και $x_2 = \frac{e+2 - \sqrt{e^2+8}}{2} \in (0,1)$

Διότι $e+2 - \sqrt{e^2+8} > 0 \Leftrightarrow$

$$e+2 > \sqrt{e^2+8} \Leftrightarrow$$

$$(e+2)^2 > \sqrt{e^2+8}^2 \Leftrightarrow$$

$$e^2 + 4e + 4 > e^2 + 8 \Leftrightarrow$$

$$4e > 4 \Leftrightarrow$$

$$e > 1 \quad \text{ισχύει}$$

και

$$\frac{e+2-\sqrt{e^2+8}}{2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$e+2-\sqrt{e^2+8} < 2 \Leftrightarrow$$

$$e^2 < \sqrt{e^2+8}^2 \Leftrightarrow$$

$$e^2 < e^2+8 \Leftrightarrow$$

$$0 < 8 \quad | \text{ΓΧΥΣΗ}$$

Οπότε

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	$+\infty$
$x^2 - (e+2)x + e - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

Οπότε για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το
 τριώνυμο (I) είναι αρνητικό, και
 αφού $(x_2, 1) \subseteq (x_1, x_2)$, θα ισχύει
 $g(x_0) < 0$

Οπότε $g(1) \cdot g(x_0) < 0$, άρα
 από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον
 ένας $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο
 ώστε $g(\rho) = 0$

Όμως $g'(x) = F'(x) + 1 > 0$ για
 κάθε $x \in (x_0, 1)$ από Δ1. οπότε $g(x)$
 γνησίως αύξουσα στο $(x_0, 1)$
 και $1 > x_0$
 οπότε η ρίζα μοναδική.