ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 111 σχολικού βιβλίου

Α2. Σελίδα 104 σχολικού βιβλίου

Α3. Σελίδα 74 σχολικού βιβλίου

Α4. α) Ψευδές

β) Αντιπαράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu+1}$, σελίδα 61 σχολικού βιβλίου

Α5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με

$$
\begin{aligned}
&f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3}=\frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -9x_1+x_2=-9x_2+x_1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -10x_1=-10x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2
\end{aligned}
$$

Άρα f "$1-1$" οπότε ορίζεται η f^{-1}

Β2.

$$
\begin{aligned}
&f(x)=y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3}=y \Leftrightarrow 3x+1=yx-3y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3x-yx=-1-3y \Leftrightarrow (3-y)\cdot x=-1-3y \qquad (1)
\end{aligned}
$$

• Αν $y=3$ τότε η (1) γράφεται $0=-1$ Άτοπο

• Αν $y\neq 3$ τότε η (1) γράφεται $x=\dfrac{-1-3y}{3-y} \Leftrightarrow x=\dfrac{3y+1}{y-3}$ και $x\in A_f$ άρα $x\neq 3$

Επομένως $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$

Αν $\frac{3y+1}{y-3} = 3 \Leftrightarrow 3y+1 = 3y-9 \Leftrightarrow 0y = -10$ αδύνατη

Άρα $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3},\ y \neq 3$ ή $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3},\ x \neq 3$

Αφού $A_f = A_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$ και $f(x) = f^{-1}(x)\ \ \forall x \neq 3$

Επομένως $f = f^{-1}$

B3.

α' τρόπος

$$(f \circ f)(x) = f(f'(x)) = x \text{ για κάθε } x \in A_{f^{-1}} = A_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned} D_{f \circ f} &= \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_f\} = \\ &= \{x \neq 3 \ / \ f(x) \neq 3\} = \\ &= \left\{x \neq 3 \ / \ \frac{3x+1}{x-3} \neq 3\right\} = \\ &= \{x \neq 3 \ / \ 3x+1 \neq 3x-9\} = \mathbb{R} - \{3\} \end{aligned}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x+3+x-3}{\cancel{x-3}}}{\frac{3x+1-3x+9}{\cancel{x-3}}} = \frac{10x}{10} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

B4. $L = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right)$

$$\left| \frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \cdot 1 = \left| \frac{3x+1}{x-3} \right|$$

Άρα $-\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \leq \frac{3x+1}{x-3} \leq \left| \frac{3x+1}{x-3} \right|$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left| \frac{3x+1}{x-3} \right| = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left(-\left| \frac{3x+1}{x-3} \right| \right) = 0$$

Από το κριτήριο παρεμβολής $L = 0$

Θέμα Δ

Δ1.

$$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda x}\cdot\lambda =$$

$$= \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad x>0$$

Παρατηρούμε ότι $f'(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0.$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \text{ για καθε } x\in(0,+\infty)$$

Άρα $f' \uparrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f'.

- για $0<x<1 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x)<0$
- για $x>1 \overset{f'\uparrow}{\Longleftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x)>0.$

x	$-\infty$ 0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Η $f(x)$ παρουσιάζει στο $x=1$

ελάχιστο το $f(1) = 1 \cdot \ln 1 - \ln\lambda = -\ln\lambda$.

Το σημείο του ακροτάτου είναι το $A(1, -\ln\lambda)$

Το A ανήκει στην ευθεία $x=1$ γιατί

$\lambda \in (0, +\infty) \Leftrightarrow \ln\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$-\ln\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ2. $x^x \geq \lambda x \iff$

$\ln x^x \geq \ln(\lambda x) \iff x \cdot \ln x \geq \ln(\lambda x) \iff$

$x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \iff$

$f(x) \geq 0 \iff \min f(x) \geq 0 \iff$

$-\ln\lambda \geq 0 \iff \ln\lambda \leq 0 \iff$

$0 < \lambda \leq 1.$

Άρα $\boxed{\lambda_{max} = 1}$

$-x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1)\cdot(-x_0)$

$-1 = (\ln x_0 + 1)(-x_0) \Leftrightarrow$

$x_0 \ln x_0 + x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\ln x_0 + 1 - \dfrac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow$

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{x_0 = 1}$ (από το Δ1).

Άρα $\varepsilon : y - 1 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow$

$\boxed{\varepsilon : y = x}$

Δ3. Έστω $M(x_0, g(x_0))$ τυχαίο σημείο της C_g.

Η εφαπτομένη της C_g στο M είναι η:

$$\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

$$g(x) = x^x = e^{x\cdot\ln x}$$

$$g'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' =$$

$$= x^x(\ln x + 1).$$

$$\varepsilon: y - x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1)\cdot(x - x_0)$$

για $x = 0$ και $y = 0$

έχουμε:

Δ4. i) $h(x)=\begin{cases} e^{x\ln x} & , x>0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$

• για $x>0$, $h(x)=e^{x\ln x}$ συνεχής

ως σύνθεση συνεχών.

• Στο $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^0=1=f(0)$$

γιατί: $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$. Άρα f συνεχής στο $x_0=0$.

ii) Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt\right) + (1-x)\cdot\int_0^1 h(1-t)\,dt,$$

$x \in [0,1]$

Η $\varphi(x)$ είναι:

- συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική
- $\varphi(0) = \int_0^1 h(1-t)\,dt$

Θέτουμε $u = 1-t$, $du = -dt$

για $t=0$, $u=1$ και για $t=1$, $u=0$.

Άρα $\varphi(0) = -\int_1^0 h(u)\,du = \int_0^1 h(u)\,du =$

$= \int_0^1 h(t)\,dt > 0$ γιατί:

Η $h(t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$,

$h(t) \geq 0$ στο $[0,1]$ και

η $h(t)$ δεν είναι παντού 0 στο $[0,1]$.

• $\varphi(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt < 0$ γιατί:

$$g'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

$$g''(x) = (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot (\ln x + 1)' =$$

$$= \left(e^{x\ln x}\right)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^x \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0.$$

Άρα η g στρέφει τα κοίλα άνω στο $(0,+\infty)$

Άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα, από το Δ_3 έχουμε ότι

$g(x) \geq x$ και το "=" ισχύει μόνο για $x=1$

Άρα $\int_1^2 g(x)dx > \int_1^2 x\,dx \Leftrightarrow$

$\int_1^2 g(x)dx > \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 g(x)dx > \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 g(x)dx > 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 g(x)dx > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\int_1^2 g(x)dx > 3 \Leftrightarrow$$

$$3 - 2\int_1^2 g(x)dx < 0 \Leftrightarrow \phi(1) < 0$$

Συνεπώς $\phi(0) \cdot \phi(1) < 0$

Από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $\phi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.