ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. **α) ΛΑΘΟΣ**
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ

Α4. **α)** $\left(\sqrt{x}\right)^{/} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$., x>0

β) $\left(f\left(g(x)\right)\right)^{/} = f'\left(g(x)\right)g'(x)$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Μέση τιμή:

$$\overline{x} = \frac{5+10+15+20+25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Εύρος: R = t_{max}- t_{min} = 25 – 5 = 20.

Β2. Διακύμανση:

$$s^2 = \frac{(5-15)^2 + (10-15)^2 + (15-15)^2 + (20-15)^2 + (25-15)^2}{5} =$$

$$= \frac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

Β3. Συντελεστής μεταβολής:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{50}}{15} = \frac{\sqrt{2 \cdot 25}}{15} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx \frac{1.41}{3} = 0,47$$

Με συντελεστή μεταβολής περίπου 0,47, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από 0,1 το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ακριβέστερα : Είναι $\frac{\sqrt{2}}{3} > 0{,}1$ διότι ισοδύναμα : $\sqrt{2} > 0{,}3$ και ισοδύναμα $2 > 0{,}09$ που είναι αληθές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$.
Δίνεται ότι $f'(1) = 0$, άρα:
$3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + a = 0 \Leftrightarrow -15 + a = 0 \Leftrightarrow a = 15$

Γ2. Για α = 15 η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$, ενώ η παράγωγος γίνεται : $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2, f(2))$ έχει τη μορφή $y = \kappa x + \lambda$, όπου:
$\kappa = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = -9$.
Είναι επίσης $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 3$
Έτσι το σημείο $\mathrm{M}(2, \mathrm{f}(2))$ γίνεται $\mathrm{M}(2,3)$
Με κ= - 9 εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται: $y = -9x + \lambda$
Για $x = 2$, $y = 3$ είναι $3 = -9 \cdot 2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 21$.
Άρα τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2,3)$ είναι $\boxed{y = -9x + 21}$

Γ3. Για α = 15 έχουμε:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1, \qquad f'(x) = 3x^2 - 18x + 15.$$
$$f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x^2 - x - 5x + 5) = 3[x(x-1) - 5(x-1)]$$
$$= 3(x-1)(x-5).$$

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Δηλαδή: η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1]$, $[5,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = 8$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 5, το $f(5) = -24$.

Γ4. $\dfrac{f'(x)}{x^2-1} = \dfrac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3(x-5)}{x+1}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-5)}{x+1} = \dfrac{3(1-5)}{1+1} = -6$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Δ1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f, πρέπει x + 1 ≠ 0, άρα x ≠ -1. Έτσι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$.
Η παράγωγος ισούται με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x'\cdot(x+1) - x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Δ2. Επειδή $f'(2) = \dfrac{1}{(2+1)^2} = \dfrac{1}{9}$ και $f'(1) = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4}$, προκύπτει ότι $\bar{x} = 9, s = 2$.

Δ3. Χρόνο επιστροφής από 5 έως 10 λεπτά, άρα στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$ έχουν (13,5 + 34 + 34) % = 81,5% μαθητές.
Προκύπτει σύνολο $\frac{81{,}5}{100} \cdot 2000 = 1630$ μαθητές.
Χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά δηλαδή μεγαλύτερο του $\bar{x} + 3s$ έχει το 0,15 % , άρα $\frac{0{,}15}{100} \cdot 2000 = 3$ μαθητές.

Δ4. Αν ο χρόνος επιστροφής αυξηθεί κατά 3 λεπτά:

- Η μέση τιμή θα γίνει $\bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$.
- Η τυπική απόκλιση θα μείνει η ίδια, δηλαδή 2.