ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

| ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: | *09/ 06 /207* |
|---|---|
| ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: | ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π*** |

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

## Θεμα Α

Α1. Σχ. Βιβλίο σελ. 135

Α2. α. → Λ

β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.

Η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλα δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

Ενω $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι μια συνάρτηση $f$ μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Α3. Σχ. βιβλίο σελ. 73

Α4. α → Λ

β → Σ

γ → Λ

δ → Σ

ε → Σ

## Θέμα Β

$f(x)=\ln x \qquad A=(0,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x}{1-x} \qquad B=\mathbb{R}-\{1\}$

**Β1**

$$\Gamma=\left\{\begin{array}{c} x\in B \\ g(x)\in A\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c} x\neq 1 \\ x(1-x)>0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} x\neq 1 \\ x\in(0,1)\end{array}\right\}=(0,1)$$

$$f(g(x))=\ln(g(x))=\ln\frac{x}{1-x} \text{ με } x\in(0,1)$$

**Β2** Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως

$$h'(x)=\left[\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=$$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$$

Άρα η $h$ είναι γν. αύξουσα στο $(0,1)$

επομένως και 1-1 άρα ορίζεται η

αντίστροφη..

Θέτουμε $h(x)=y \Leftrightarrow$

$$\ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = e^y(1-x) \Leftrightarrow e^y - x\,e^y = x \Leftrightarrow$$

$$x + e^y \cdot x = e^y \Leftrightarrow x(e^y+1) = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e^y}{e^y+1}, \; y \in \mathbb{R}.$$

$$x \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < \frac{e^y}{e^y+1} < 1 \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}!$$

Επομένως έχουμε $h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

B3) $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)' = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

Επομένως η $\varphi$ είναι γν. αύξουσα

άρα δεν έχει ακρότατα

$$\varphi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)' = \frac{e^x \cdot (e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{(e^x+1) \cdot e^x \left[e^x + 1 - 2e^x\right]}{(e^x+1)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$1-e^x=0 \Leftrightarrow e^x=e^0 \Leftrightarrow x=0$

$\varphi''(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-e^x\geq 0 \Leftrightarrow$

$e^x \leq e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x\leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\varphi$ | $\cup$ | | $\cap$ |

Η $\varphi$ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και

η $\varphi$ " κοίλη στο $[0,+\infty)$

Η $\varphi$ εμφανίζει σημείο καμπής στο $x_0=0$

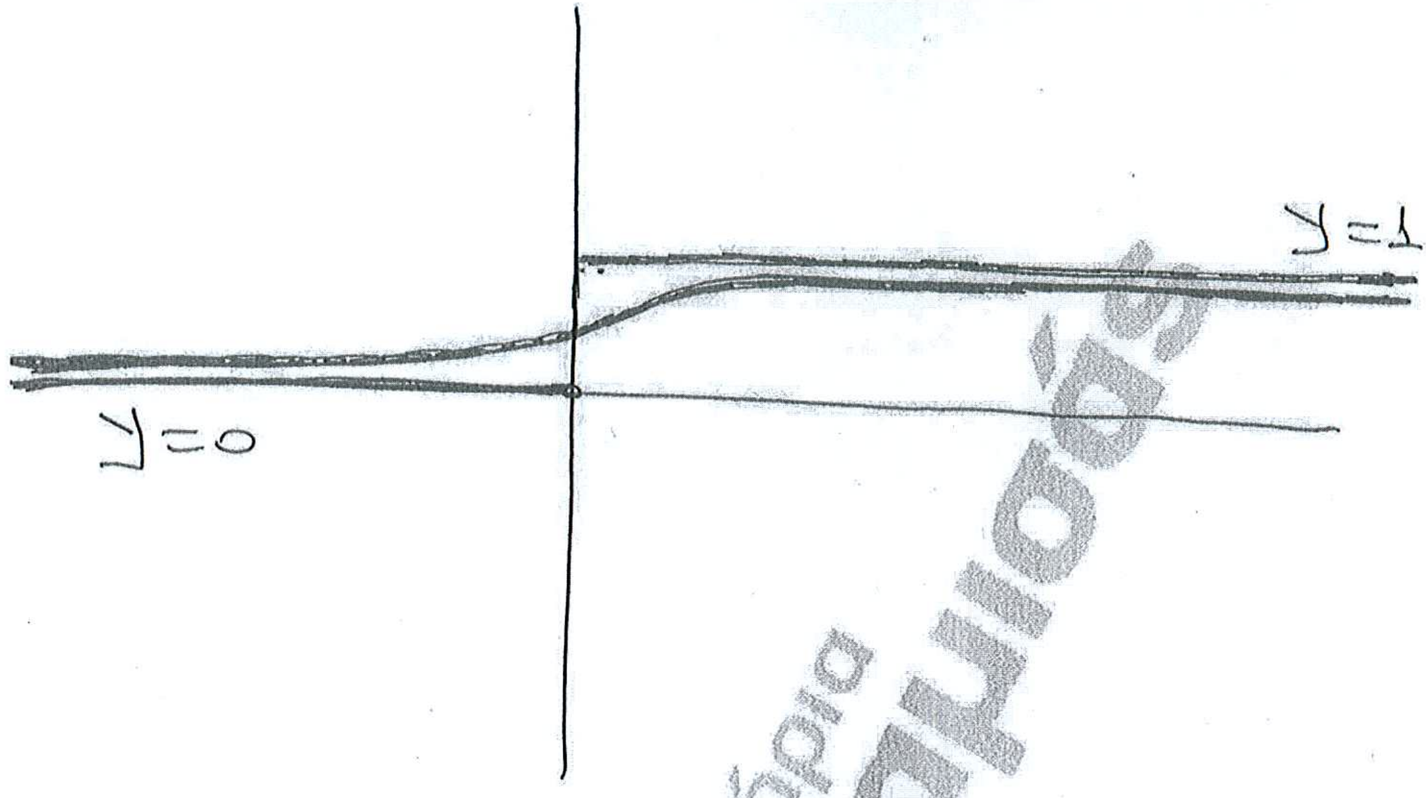
το $(0,\varphi(0))=(0,1/2)$

<u>Β4</u> $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

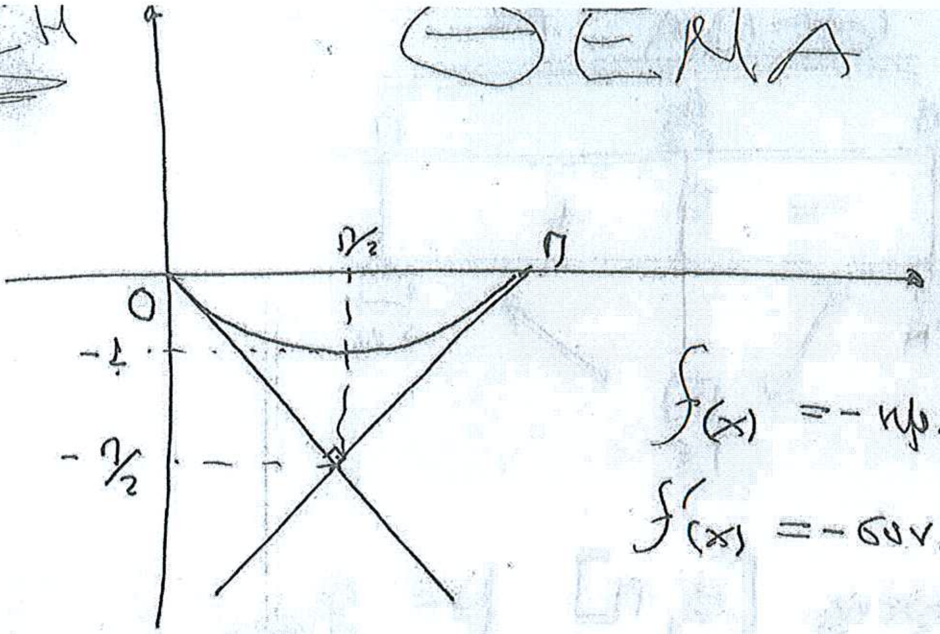
$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{1}=0.$

Επομένως οριζόντιες ασύμπτωτες είναι

η $y=0$ στο $-\infty$ και η $y=1$ στο $+\infty$


y=1
y=0

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑ Γ




$f(x) = -ημx,\ [0,π]$

$f'(x) = -συνx,\ [0,π]$

$\boxed{1}$ Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της $C_f$ στο οποίο δέχεται εφαπτομένη που διέρχεται από $A(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2})$

Εξίσωση εφαπτομένης: $(ε)\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow$

$$(ε)\ y + ημx_0 = -συνx_0 \cdot (x - x_0)$$

$A(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}) \in (ε): -\frac{π}{2} + ημx_0 = -συνx_0 (\frac{π}{2} - x_0) \Longleftrightarrow$

$$-\frac{π}{2} + ημx_0 = -\frac{π}{2}συνx_0 + x_0 συνx_0 \Longleftrightarrow$$

$$συνx_0 (\frac{π}{2} - x_0) + ημx_0 - \frac{π}{2} = 0$$

Θεωρώ $g(x) = συνx \cdot (\frac{π}{2} - x) + ημx - \frac{π}{2}$

Είναι $g(0) = 0$ κ $g(π) = 0$

$$g'(x) = -ημx(\frac{π}{2} - x) - \cancel{συνx} + \cancel{συνx}$$

Για $x \in (0, \frac{π}{2})$ είναι $g'(x) < 0$

Για $x \in (\frac{π}{2}, π)$ είναι $g'(x) > 0$

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑ Γ

| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | ΤΜ | ↘ | ΤΕ | ↗ | ΤΜ |

$g$ συνεχής $[0,\pi]$ με $g_{max} = g(0) = g(\pi) = 0$

Άρα μοναδικές λύσεις $x=0$ κ $x=\pi$

Εξισώσεις εφαπτομένων:

$(\varepsilon_1)\ y=-x$ $(\varepsilon_2)\ y=x-\pi$

$\boxed{2}$ Τομή $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ : $A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = ημx > 0$ για $x \in (0,\pi)$ οπότε

$f$ κυρτή $[0,\pi]$ επομένως η $C_f$

βρίσκεται πάνω από τις $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$

με εξαίρεση τα σημεία επαφής αντίστοιχα

Άρα $f(x) \geq -x \iff f(x)+x \geq 0$

κ $f(x) \geq x-\pi \iff f(x)-x+\pi \geq 0$ για $x \in [0,\pi]$

$$E_1 = \int_0^{\pi/2} \left(f(x) + x\right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(f(x) - x + \pi\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\eta\mu x + x\right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-\eta\mu x - x + \pi\right) dx$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\sigma\upsilon\nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{\pi^2}{8} - 1 + (-1) - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 0 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} -f(x)\, dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

Είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

$\boxed{3}$

$$\lim_{x\to n} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+n} = \lim_{x\to n}\left[\frac{1}{f(x)-x+n}\,(f(x)+x)\right] = +\infty$$

διότι $\lim_{x\to n}(f(x)+x) = n$

και $f(x)-x+n > 0$ για $x\in(0,n)$

$\lim_{x\to n}(f(x)-x+n) = 0$ οπότε

$$\lim_{x\to n}\frac{1}{f(x)-x+n} = +\infty$$

$\boxed{4}$ Είναι $f(x) > x-n$, $x\in[1,e]$

από $\Gamma_2$ (το ίσον ισχύει μόνο για $x=n>e$)

οπότε $\frac{f(x)}{x} > 1-\frac{n}{x}$, $x\in[1,e]$

και $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1-\frac{n}{x}\right)dx \Longrightarrow$

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \left[x-n\ln x\right]_1^e = e-n-(1-0) \Longrightarrow$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-n-1$$

4

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΘΕΜΑ Δ

## ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Δ1. $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$ f συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4}=0 \\ f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x ημx)=e^0\cdot 0=1\cdot 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } x_0=0$$

$f(x)=e^x ημx$ συνεχής στο $(0,π]$ ως γινόμενο συνεχών

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,π]$

$x\in[-1,0)$ $f'(x)=\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)'=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$

$x\in(0,π]$ $f'(x)=(e^x)'ημx+e^x(ημx)'=e^xημx+e^xσυνx=e^x(ημx+συνx)$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|^{4/3}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{4/3}}{-x}=-\lim_{x\to 0^-}(-x)^{1/3}=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x ημx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{ημx}{x}\right)=e^0\cdot 1=1$$

Επομένως δεν υπάρχει το $f'(0)$

Συνεπώς $f'(x)=\begin{cases} -\frac{4}{3}(-x)^{1/3} , & x\in[-1,0) \\ e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x) , & x\in(0,\pi] \end{cases}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 1=-\sigma\varphi x \Leftrightarrow \sigma\varphi x=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4} \underset{\kappa=1}{\overset{x\in(0,\pi]}{\Leftrightarrow}} x=\frac{3\pi}{4}$

Άρα κρίσιμα σημεία τα $x_0=0$ (δεν υπάρχει η $f'(x)$)

και $x=\frac{3\pi}{4}$

Δ2. $f'(x)=-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}<0,\ \forall x\in(-1,0) \Rightarrow f\downarrow[-1,0)$

$x\in(0,\pi)$ : $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x>0 \Leftrightarrow 1>-\sigma\varphi x \Leftrightarrow \sigma\varphi x>-1$

$\Leftrightarrow \sigma\varphi x>\sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x<-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x<\frac{3\pi}{4}$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=-\frac{4}{3}(-x)^{1/3}$ | | $-$ | | // | | // | |
| $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ | | // | | $+$ | | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

$f([-1,\pi])=\left[0,\ e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Δ3. $E(\Omega) = \int_0^{\pi} |f(x)-g(x)|\,dx = \int_0^{\pi} |e^x ημx - e^{5x}|\,dx$

Έστω $h(x) = e^x ημx - e^{5x}$, $x \in [0,\pi]$

$h'(x) = e^x ημx + e^x συνx - 5e^{5x}$
$= e^x(ημx + συνx) - 5e^{5x}$

Ξέρω $ημx + συνx \leq 2 \xRightarrow{\cdot e^x} e^x ημx + e^x συνx \leq 2e^x \xRightarrow{-5e^{5x}}$
$\Rightarrow e^x ημx + e^x συνx - 5e^{5x} \leq 2e^x - 5e^{5x} < 0 \Rightarrow h \downarrow [0,\pi]$

Ξέρω $0 \leq x \leq \pi \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(0) \geq h(x) \geq h(\pi) \Leftrightarrow h(x) < 0$

$E(\Omega) = -\int_0^{\pi} (e^x ημx - e^{5x})\,dx \quad (1)$

• $I_1 = \int_0^{\pi} e^x ημx\,dx = \int_0^{\pi} (e^x)' ημx\,dx = [e^x ημx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x (ημx)'\,dx = 0 - \int_0^{\pi} e^x συνx\,dx$

$= -\int_0^{\pi} (e^x)' συνx\,dx = -[e^x συνx]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x (συνx)'\,dx = -(e^{\pi} συνπ - e^0 συν0) - \int_0^{\pi} e^x ημx\,dx$

$= -(-e^{\pi} - 1) - I_1 = e^{\pi} + 1 - I_1 \Rightarrow 2I_1 = e^{\pi} + 1 \Rightarrow I_1 = \frac{e^{\pi}+1}{2}$

• $I_2 = \int_0^{\pi} e^{5x}\,dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{5\pi}-1}{5}$

(1) $E(\Omega) = -(I_1 - I_2) = -\left(\frac{e^{\pi}+1}{2} - \frac{e^{5\pi}-1}{5}\right) = \frac{e^{5\pi}+1}{5} - \frac{e^{\pi}+1}{2}$

Δ4. $16e^{-\frac{3\pi}{4}} \cdot f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 16 \cdot f(x) - (4x-3\pi)^2 = 8\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow 16 f(x) = 8\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}} + (4x-3\pi)^2$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{(4x-3\pi)^2}{16}$

$\Leftrightarrow f(x) = f_{max} + \frac{(4x-3\pi)^2}{16}$

$\Leftrightarrow f_{max} = f(x) - \frac{(4x-3\pi)^2}{16} \geq f(x)$ Επομένως

$-\frac{(4x-3\pi)^2}{16} \geq 0 \Leftrightarrow (4x-3\pi)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (4x-3\pi)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 3\pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ δεκτή