**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΘΗΝΩΝ**

**Σ**

**" ΣΠΟΥΔΗ "**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
## Γ' ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
## ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:28/05/2012

### ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σελίδα σχολικού βιβλίου 253

Α2. Θεωρία. Σελίδα σχολικού βιβλίου 191

Α3. Θεωρία. Σελίδα σχολικού βιβλίου 258

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

### ΘΕΜΑ Β

Β1. Αν $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$ είναι:

$$|x+yi-1|^2+|x+yi+1|^2=4\Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=4\Leftrightarrow x^2+y^2=1$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

Β2. Είναι $|z_1-z_2|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2\Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2\Leftrightarrow$

$$|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1=2\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=0 \quad (1)$$

οπότε $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\overset{(1)}{=}2$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

Β3. Αν $w=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ είναι:

$$|x+yi-5(x-yi)|=12\Leftrightarrow |-4x+6yi|=12\Leftrightarrow$$

$$16x^2+36y^2=144\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι η παραπάνω έλλειψη.

Τα κοινά σημεία της έλλειψης με τον άξονα $x'x$ που έχει εξίσωση $y=0$ είναι $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$. Άρα η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι 3.

Τα κοινά σημεία της έλλειψης με τον άξονα $y'y$ που έχει εξίσωση $x=0$ είναι $B(0,2)$ και $B'(0,-2)$. Άρα η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι 2

Β4. Είναι $|z|=1$ και $2\le|w|\le 3$, οπότε:

$$|z-w|\le|z|+|w|\le 1+3=4$$

$$|z-w|\ge\big||z|-|w|\big|=\big||w|-|z|\big|=\big||w|-1\big|=|w|-1\ge 1$$

## ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f'(x)=\ln x+(x-1)\dfrac{1}{x}$, $x>0$ με $f'(1)=0$ $f''(x)=\dfrac{x+1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$

Άρα η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα με $f'(1)=0$, οπότε;

$$x>1\Leftrightarrow f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$$

$$0<x<1\Leftrightarrow f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$$

Άρα η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $y_{OE}=f(1)=-1$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε:

$$f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty)$$

$$f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$$

Άρα το σύνολο τιμών $f(\Delta)$ είναι $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow(x-1)\ln x-2013=0\Leftrightarrow f(x)-2012=0$$

Έστω η συνάρτηση $h$ με $h(x)=f(x)-2012,\ x>0$. Η $h$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την $f$, δηλαδή η $h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1$και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2$ με $y_{OE}=-2013$.
Είναι $h(\Delta_1)=[-2013,+\infty)$. Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ η $h$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\Delta_1$ και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα είναι μοναδική.
Είναι $h(\Delta_2)=[-2013,+\infty)$. Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ η $h$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\Delta_2$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.
Άρα η $h$ επομένως και η δοσμένη εξίσωση έχει δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Είναι $h(x_1)=h(x_2)=0$
Έστω η συνάρτηση $\varphi$ με $\varphi(x)=f'(x)+f(x)-2012, x\in[x_1,x_2]$

- Η $\varphi$ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $\varphi(x_1)=f'(x_1)+f(x_1)-2012=f'(x_1)<0$
  $\varphi(x_2)=f'(x_2)+f(x_2)-2012=f'(x_2)>0$

Άρα $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$, οπότε για την $\varphi$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano στο $[x_1,x_2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$, τέτοιο ώστε να είναι $\varphi(x_0)=0$ που είναι το ζητούμενο.

Γ4. Είναι $g(x)=(x-1)\ln x$ με $g(1)=0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,e]$.
Επομένως:

$$E=\int_1^e (x-1)\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x\,dx=$$
$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}\,dx=$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{e^2}{4}-e\right]+\left[\frac{1}{4}-1\right]=$$
$$=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η $f$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$.
Επομένως η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$e\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt+x^2-x\geq 0$$

Έστω η συνάρτηση $g$ με $g(x)=e\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt+x^2-x,\ x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ και $g(1)=0$. Άρα ισχύει $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η $g$ παρουσιάζει στο $x_0=1$ ελάχιστο και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat είναι $g'(1)=0$. Είναι:

$g'(x)=ef\left(x^2-x+1\right)(2x-1)+2x-1$, οπότε:

$$g'(1)=0\Leftrightarrow ef(1)+1=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$$

Άρα είναι $f(x)<0$ για κάθε $x>0$. Για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)$$

Επειδή $\ln x-x<0$ για κάθε $x>0$ από την παραπάνω ισότητα συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e>0$ για κάθε $x>0$ άρα $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e},\ x>0$

και η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Είναι $\frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}\,dt+e$. Παραγωγίζουμε τα μέλη της ισότητας οπότε:

$$\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\frac{\ln x-x}{f(x)}.\ \text{Άρα}\ \frac{\ln x-x}{f(x)}=c\,e^x$$

Για $x=1$ προκύπτει $e=c\,e\Leftrightarrow c=1$

Άρα $f(x)=e^{-x}(\ln x-x),\ x>0$

**Δ2.** Είναι $f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)=f^2(x)\left[\eta\mu\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]=\dfrac{\eta\mu\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f^2(x)}}$

Θέτουμε $u=\frac{1}{f(x)}$, οπότε επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{f(x)}=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to0^+}\left[\left(f(x)\right)^2\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]=\lim_{u\to0^-}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{u\to0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0$$

**Δ3.** Είναι $F'(x)=f(x)$

$$F''(x)=f'(x)=e^{-x}\left(-\ln x+x-1+\frac{1}{x}\right),\ x>0$$

Επομένως είναι $F''(x)>0$ για κάθε $x>0$ , άρα η $F$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Για την $F$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[x,2x]$ και $[2x,3x]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(x,2x)$ και $\xi_2\in(2x,3x)$ τέτοια ώστε να είναι:

$$F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Επειδή η $F$ είναι κυρτή η $F'$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση οπότε:

$$\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Leftrightarrow F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Leftrightarrow F(x)+F(3x)>2F(2x)$$

**Δ4.** Έστω η συνάρτηση $H$ με

$$H(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta),\ x\in[\beta,2\beta]$$

- Η $H$ είναι συνεχής στο $[\beta,2\beta]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων
- $H(2\beta)=2F(2\beta)-F(\beta)-F(3\beta)<0$

  $H(\beta)=F(\beta)-F(3\beta)>0$

διότι $F'(x)=f(x)<0$ για κάθε $x>0$, άρα η $F$ είναι γνησίως φθίνουσα , οπότε:

$$\beta<3\beta\Leftrightarrow F(\beta)>F(3\beta)\Leftrightarrow F(\beta)-F(3\beta)>0\Leftrightarrow H(\beta)>0$$

Άρα $H(\beta)H(2\beta)<0$, επομένως για την $H$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\beta,2\beta)$, τέτοιο ώστε να είναι $H(\xi)=0$ που είναι το ζητούμενο.

**Κλάδος Μαθηματικών**

**Σκύφας Αθανάσιος**
**Γιαννάκος Παναγιώτης**
**Ανδριώτης Δημήτρης**
**Σαρρή Ελένη**
**Παύλου Φώτης**
**Τάτσης Πέτρος**
**Κουκόσιας Δημήτρης**
**Σταθοπούλου Ιωάννα**
**Βασιλακόπουλος Πραξιτέλης**
**Μπαλαδήμα Βάνα**