ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$ **Μονάδες 7**

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.). **Μονάδες 4**

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho, \rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$.

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα $\rho = 1$. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \le 3$. (μονάδες 3) **Μονάδες 8**

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και $|\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 5$. **Μονάδες 9**

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση $\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0$, τότε να αποδείξετε ότι $|\nu| < 4$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη, τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και

- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x))=1$. **Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\dfrac{\pi}{4}\right)εφx_0$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt,\ x\in(1,+\infty)$ και α >1. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ (μονάδες 2). **Μονάδες 6**

Δ2. Η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$: $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6}g(u)du$ (μονάδες 6). **Μονάδες 9**

Δ3. Η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση $(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $x>1$, έχει ακριβώς μία λύση. **Μονάδες 10**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 334-335.
Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 246.
Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 222.
Α4. $\alpha\to Λ,\ \beta\to Σ,\ \gamma\to Σ,\ \delta\to Λ,\ \varepsilon\to Σ$

ΘΕΜΑ Β

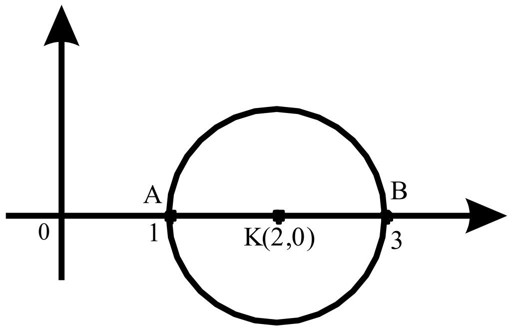
Β1. Είναι $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2\Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0\Leftrightarrow \begin{cases}|z-2|=1 \text{ ή}\\ |z-2|=-2 \text{ αδύνατο}\end{cases}$

άρα $|z-2|=1\Leftrightarrow|z-(2+0i)|=1$. Επομένως ο Γ.Τ. των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα $\rho=1$. Είναι

<u>1ος τρόπος</u>

$||z|-|-2||\le|z-2|=1\Leftrightarrow -1\le|z|-2\le1\Leftrightarrow 1\le|z|\le3.$

$2^{ος}$ τρόπος



άρα $\max|z| = (OB) = 3$.

B2. Έστω: z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ με $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Τότε $\overline{z}_2 = z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = -y_1 \end{cases}$

$|\mathrm{Im} z_1 - \mathrm{Im} z_2| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - (-y_1)| = 2 \Leftrightarrow |y_1| = 1 \quad (1)$

και ο z_1 ανήκει στον κύκλο με κέντρο K(2,0) και ακτίνα $\rho = 1$,

άρα $(x_1 - 2)^2 + y_1^2 = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 = 2$ και $y_1 = \pm 1$.

Άρα $z_1 = 2 + i$, $z_2 = \overline{z}_1 = 2 - i$.

Οπότε $z_1 + z_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow z_1 + \overline{z}_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 4 = -\beta$ άρα $\beta = -4$

και $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow z_1 \overline{z}_1 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow |z_1|^2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5$.

B3. $1^{ος}$ τρόπος

Έστω $|\nu| \geq 4$. Τότε $\nu^3 = -\alpha_2 \nu^2 - \alpha_1 \nu - \alpha_0$,

άρα $|\nu^3| = |-\alpha_2 \nu^2 - \alpha_1 \nu - \alpha_0| = |\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0|$.

Από τριγωνική ανισότητα

$|\nu|^3 = |\alpha_2 \nu^2 + \alpha_1 \nu + \alpha_0| \leq |\alpha_2||\nu|^2 + |\alpha_1||\nu| + |\alpha_0| \leq 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right)$,

άρα $|\nu|^3 \leq 3\dfrac{|\nu|^3 - 1}{|\nu| - 1}$, $|\nu| \neq 1$ γιατί $|\nu| \geq 4$.

$|\nu|^3 (|\nu| - 1) \leq 3\left(|\nu|^3 - 1\right) \Leftrightarrow |\nu|^4 \leq 4|\nu|^3 - 3$,

όμως $4|\nu|^3 - 3 < 4|\nu|^3$, άρα $|\nu|^4 < 4|\nu|^3 \Leftrightarrow |\nu| < 4$ άτοπο, άρα $|\nu| < 4$.

$2^{ος}$ τρόπος

$|\nu|^3 = |\alpha_2 \nu^2 + \alpha_2 \nu + \alpha_0| \leq |\alpha_2||\nu|^2 + |\alpha_0| \leq 3|\nu^2| + 3|\nu| + 3$,

άρα $|\nu|^3 - 3\left[|\nu^2| + |\nu| + 1\right] \leq 0 \Leftrightarrow |\nu|^3 - 3\left[|\nu^2| + |\nu| + 1\right] + 1 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\left[|\nu| - 1\right]\left[|\nu|^2 + |\nu| + 1\right] - 3\left[|\nu|^2 + |\nu| + 1\right] \leq -1 \Leftrightarrow \left[|\nu|^2 + |\nu| + 1\right]\left[|\nu| - 4\right] \leq -1 \Leftrightarrow$

$|\nu|^2 + |\nu| + 1 > 0$

άρα $|\nu| - 4 < 0 \Leftrightarrow |\nu| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x,\ x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)'=x \Leftrightarrow 2\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)'=2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(f(x)+x\right)^2\right]'=\left(x^2\right)',\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα, από συνέπεια του Θ.Μ.Τ. είναι $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c,\ x\in\mathbb{R}$ (1)
και c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Για $x=0$ η (1) δίνει $\left(f(0)\right)^2=c \overset{f(0)=1}{\Leftrightarrow} c=1,$ άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}.$

Έστω $\kappa(x)=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}.$ Τότε η κ ως άθροισμα συνεχών
(η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα συνεχής, η x πολυωνυμική)
είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$\kappa^2(x)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ (2)

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $\kappa(x_0)=0.$

Τότε η (2) για $x_0=0$ δίνει $x_0^2+1=0,$ αδύνατη στο $\mathbb{R}.$

Επομένως η κ ως συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $\mathbb{R}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

- Αν $\kappa(x)>0,$ τότε $\kappa(x)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}.$
- Αν $\kappa(x)<0,$ τότε $\kappa(x)=-\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=-\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}.$

Όμως $f(0)=1,$ άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}.$

Γ2. Είναι $f\left(g(x)\right)=1\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(0),\ x\in\mathbb{R}$ (3)

Όμως $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0$

γιατί $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow \begin{cases}\text{για } x\geq 0 \text{ είναι } x^2+1>x^2\\ \text{για } x<0 \text{ ισχύει}\end{cases}$

επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

επομένως η (3) δίνει $g(x)=0\Leftrightarrow x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1=0.$

Η g ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1),\ x\in\mathbb{R},$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0 \text{ ή}\\ x=-1\end{cases}$

$g'(x)>0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-1)=-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$g(0)=-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

Όταν $x \in (-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(-1)\right] = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Το 0 <u>δεν</u> ανήκει στο σύνολο τιμών της, άρα η $g(x)=0$ αδύνατη για $x \in (-\infty,-1]$.

Όταν $x \in [-1,0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[g(0), g(-1)\right] = \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right]$.

Το 0 <u>δεν</u> ανήκει στο σύνολο τιμών της, άρα η $g(x)=0$ αδύνατη για $x \in [-1,0]$.

Όταν $x \in [0,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left[g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = [-1,+\infty)$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της και επειδή είναι γνησίως μονότονη υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0,+\infty)$ ώστε $g(\rho)=0$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Lambda(x) = f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x + \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα ορίζεται η $K(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη με $K'(x)=f(x)$.

Η $F(x)=\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = K\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η Λ(x), ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως και στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$\Lambda(0) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi 0 + \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt < 0$$

γιατί $f(x)>0$ στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right]$.

$-\dfrac{\pi}{4}<0$ άρα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt > 0$

και $\Lambda\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f(0)\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} + \int_0^0 f(t)\,dt = f(0) \overset{\text{Υπόθ.}}{=\!=} 1 > 0$, δηλαδή $\Lambda(0)\Lambda\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$.

Η Λ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$,

επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ ώστε

$$\Lambda(x_0)=0 \Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0 + \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0 = \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]=0.$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}\underset{\substack{\text{όταν } h\to 0\\ \text{το } u\to 1}}{\overset{1+5h=u}{=\!=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(u)-f(1)}{\frac{u-1}{5}}=5\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{f(u)-f(1)}{u-1}=5f'(1)$

και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\underset{\substack{\text{όταν } h\to 0\\ \text{το } t\to 1}}{\overset{1-h=t}{=\!=}}\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{f(t)-f(1)}{-(t-1)}=-f'(1)$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

άρα $5f'(1)+f'(1)=0$ δηλαδή $f'(1)=0.$

Για $x>1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)=0.$

Για $0<x<1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)=0.$

Η f στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=1,$ δηλαδή $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x\in(0,+\infty).$ [Η από κυρτότητα και εφαπτομένη στο $x_0=1$].

Δ2. Η συνάρτηση $\kappa(t)=\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ ως πηλίκο συνεχών είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $\alpha>1,$ επομένως ορίζεται η $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\kappa(t)dt$ στο $(1,+\infty),\ \alpha>1,$

και είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\kappa(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0,\ x\in(1,+\infty),$

γιατί από το **Δ1** για $x>1\Rightarrow f(x)>f(1)=1\Rightarrow f(x)-1>0.$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{x}^{x+1}g(u)du$ στο $(1,+\infty).$

Η g ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $(1,+\infty),$ άρα ορίζεται η $\omega(x)=\int_{\kappa}^{x}g(u)du$ στο $(1,+\infty)$ με $\kappa>1$ και είναι παραγωγίσιμη με $\omega'(x)=g(x).$

Τότε $F(x)=\omega(x+1)-\omega(x),\ x\in(1,+\infty),$

αφού $A_{\omega(x+1)}=\{x\in\mathbb{R}:\ x+1>1\}=(0,+\infty),$

άρα $A_F=A_{\omega(x+1)}\cap A_{\omega(x)}=(1,+\infty)$

και είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=\omega'(x+1)-\omega'(x)=g(x+1)-g(x)>0,\ x\in(1,+\infty),$

αφού $x+1>x\underset{\text{στο }(1,+\infty)}{\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}}g(x+1)>g(x).$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty).$

Είναι $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6}g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6}g(u)du\Leftrightarrow F(8x^2+5)>F(2x^4+5)\overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0\Leftrightarrow 2x^2(x^2-4)<0\Leftrightarrow x^2-4<0\Leftrightarrow$

$x\in(-2,0)\cup(0,2)$

γιατί $8x^2+5>1$ και $2x^4+5>1$

Δ3. Είναι $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1},\ x\in(1,+\infty)$.

Ως πηλίκο παραγωγίσιμων είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2},\ x\in(1,+\infty)$$

$$=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-1}{x-1}}{(x-1)^3}>0 \text{ στο } (1,+\infty).$$

<u>Γιατί:</u> Για τη συνάρτηση f στο $[1,x]$ με $x>1$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, αφού η f, ως παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$.

Επομένως υπάρχει $\xi\in(1,x):\ f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$.

Είναι $1<\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow f'(x)-\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$.

Επομένως η g είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η εξίσωση $(\alpha-1)\displaystyle\int_\alpha^x\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x>1$

ισοδύναμα γράφεται $(\alpha-1)g(x)=(f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x>1$

$\overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow}g(x)=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)\quad(1)$

<u>1ος τρόπος</u>

Το $x_0=\alpha$ προφανής ρίζα.

Για $x\neq\alpha$ η (1) γράφεται $\dfrac{g(x)}{x-\alpha}=\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\Leftrightarrow\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}=g'(\alpha)\quad(2)$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[\alpha,x]$ με $1<\alpha<x$.

Η g ως παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,x]$ και παραγωγίσιμη στο (α,x).

Επομένως υπάρχει $\rho_1\in(\alpha,x):\ g'(\rho_1)=\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$.

Όμως $\alpha<\rho_1<x\underset{\text{άρα } g'\uparrow}{\overset{g \text{ κυρτή}}{\Rightarrow}}g'(\rho_1)>g'(\alpha)\Rightarrow\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}>g'(\alpha)$.

Επομένως η (2) είναι αδύνατη.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[x,\alpha]$ με $1<x<\alpha$.

Η g ως παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ είναι συνεχής στο $[x,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο (x,α), επομένως υπάρχει $\rho_2\in(x,\alpha):\ g'(\rho_2)=\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}$.

Όμως $x<\rho_2<\alpha\underset{\text{άρα } g'\uparrow}{\overset{g \text{ κυρτή}}{\Rightarrow}}g'(\rho_2)<g'(\alpha)\Rightarrow\dfrac{g(x)-g(\alpha)}{x-\alpha}<g'(\alpha)$.

Επομένως η (2) είναι αδύνατη.

Άρα η δοσμένη εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x=\alpha$.

<u>2^{ος} τρόπος</u>

Η (1) γράφεται $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στην C_g στο α είναι $y=g'(\alpha)(x-\alpha)$.

Η g είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$, άρα $g(x)\geq y\Rightarrow g(x)\geq g'(\alpha)(x-\alpha)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

<u>3^{ος} τρόπος</u>

Μονοτονία για την $\Pi(x)=(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt-(f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x\in(1,+\infty)$.

Επιμέλεια:
Σ. ΚΟΥΤΣΟΥΒΕΛΗΣ – Π. ΛΥΓΚΩΝΗΣ – Μ. ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ
Τ. ΝΤΡΙΤΣΟΣ – Μ. ΤΣΙΜΕΛΑΣ – Δ. ΣΤΡΟΥΖΑΚΗΣ