ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι

$$\left(cf(x)\right)' = cf'(x),\ \text{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α3. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής; **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$, για κάθε $x_0 \in (\alpha,\beta)$, και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

(μονάδες 2)

β. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B)=P(B)-P(A\cap B)$$

(μονάδες 2)

γ. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)

δ. Αν x_i είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, τότε η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i.

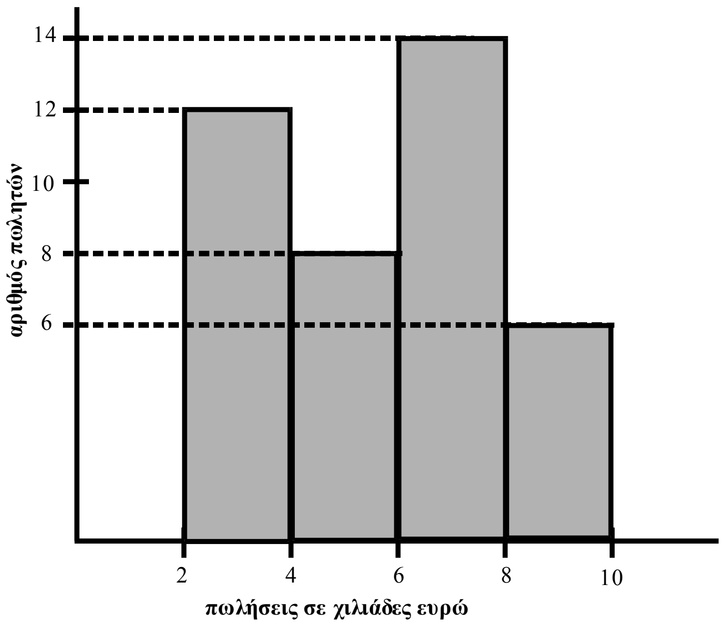
(μονάδες 2)

ε. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



Β1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας. **Μονάδες 5**

Β2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες $f_i, \ i = 1,2,3,4$

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Συχνότητα** ν_i	**Σχετική συχνότητα** f_i
$[\cdot,\cdot)$			
$[\cdot,\cdot)$			
$[\cdot,\cdot)$			
$[\cdot,\cdot)$			
Σύνολο			

Μονάδες 8

Β3. **α.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους. (μονάδες 6)

β. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες). (μονάδες 6)

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι $P(K) = x_1$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(A) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

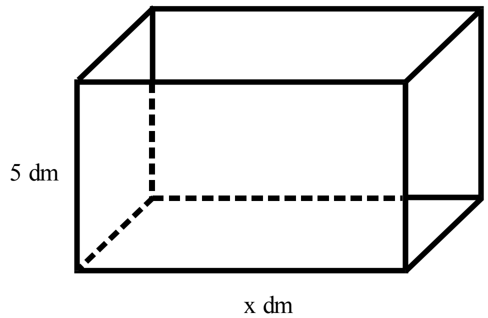
Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες P(Κ), P(Α) και P(Π), όπου P(Π) η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα. **Μονάδες 10**

Γ2. Αν $P(K)=\frac{1}{4}$ και $P(A)=\frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»
Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»
Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη»
Μονάδες 9

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο. **Μονάδες 6**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και **ανοικτό από πάνω**. Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0<x<10$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $E(x)=-x^2+10x+100,\ x\in(0,10)$ και να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια. **Μονάδες 8**

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i,y_i)$, όπου $y_i=E(x_i)$, $i=1,2,\ldots,15$ με $5=x_1<x_2<\ldots<x_{14}<x_{15}=9$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων x_1, $i=1,2,\ldots,15$ των παραπάνω σημείων $A_i(x_i,y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\bar{x}=8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε $2s^2-5s+2=0$

τότε:
α) να αποδείξετε ότι $s=2$ (μονάδες 4)
β) να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2, με $i=1,2,\ldots,15$

Δίνεται ότι: $s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}$ (μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δ3. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία $A_i(x_i,y_i,)$, $i=1,2,\ldots,15$. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:
$B=\left\{A_i(x_i,y_i),\ i=1,2,\ldots,15 \text{ τέτοια, ώστε } y_i>-4x_i+9R+1\right\}$,
όπου R είναι το εύρος των $y_i=E(x_i)$, $i=1,2,\ldots,15$ **Μονάδες 9**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελ. 30.
Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελ. 13.
Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο, σελ. 59.
Α4. α – Σ, β – Λ, γ – Λ, δ – Λ, ε – Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=12+8+14+6=40$

Β2.

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[2,4)$	3	12	0,3
$[4,6)$	5	8	0,2
$[6,8)$	7	14	0,35
$[8,10)$	9	6	0,35
Σύνολο		40	

$f_1=\dfrac{\nu_1}{\nu}=\dfrac{12}{40}=0,3,\quad f_2=\dfrac{\nu_2}{\nu}=\dfrac{8}{40}=0,2,$

$f_3=\dfrac{\nu_3}{\nu}=\dfrac{14}{40}=0,35,\quad f_4=\dfrac{\nu_4}{\nu}=\dfrac{6}{40}=0,15$

Β3. α) $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{3\cdot12+5\cdot8+7\cdot14+9\cdot6}{40}=$

$\dfrac{36+40+98+54}{40}=5,7$ χιλιάδες ευρώ

ή $\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_if_i=3\cdot0,3+5\cdot0,2+7\cdot0,35+9\cdot0,15=$

$0,9+1+2,45+1,35=5,7$ χιλιάδες ευρώ.

β) Θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, έχουμε:

σε πλάτος $6-4=2$ 8 πωλητές

σε πλάτος $6-4,5=1,5$ $x=8\cdot\dfrac{1,5}{2}=6$ πωλητές

Άρα το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδες ευρώ είναι:

$6+\nu_3+\nu_4=6+14+6=26.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x)=4x^3-\dfrac{7}{2}x^2+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=12x^2-7x+1,\ x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-7x+1=0\Leftrightarrow x_1=\dfrac{1}{4}$ ή $x_2=\dfrac{1}{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 7x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

x	$-\infty$		$1/4$		$1/3$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f στο $x_1 = \frac{1}{4}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(x_1) = f\left(\frac{1}{4}\right)$ και στο $x_2 = \frac{1}{3}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(x_2) = f\left(\frac{1}{3}\right)$

Επομένως $P(K) = x_1 = \frac{1}{4}$, $P(A) = x_2 = \frac{1}{3}$

Είναι $P(K) + P(A) + P(\Pi) = 1 \Leftrightarrow P(\Pi) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

Γ2. $P(\Gamma) = P$ (η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι Κ ή Α)=

$= P(K) + P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$P(\Delta) = P$ (η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη)=P(να είναι πράσινη)= $P(\Pi) = \frac{5}{12}$

$P(E) = P$ (η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη)=P(να είναι άσπρη ή κόκκινη)= $P(\Gamma) = \frac{7}{12}$

Γ3. Έστω Ν(Α) το πλήθος των άσπρων μπαλών και Ν(Π) το πλήθος των πράσινων μπαλών. Τότε $N(\Pi) = N(A) + 4$

$P(\Pi) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{N(A)+4}{N(\Omega)} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow$

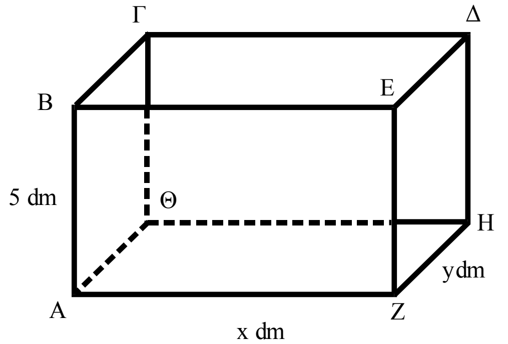
$12N(A) + 48 = 5N(\Omega) \quad (1)$

Και $P(A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow N(A) = \frac{N(\Omega)}{3} \quad (2)$

$(1),(2) \Leftrightarrow N(\Omega) = 48,$ άρα το δοχείο έχει 48 μπάλες.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η βάση του κουτιού έχει περίμετρο $\Pi = 20\text{ dm} \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x, 0 < x < 10$



άρα $E(x)=(ΑΒΓΘ)+(ΓΔΗΘ)+(ΔΕΖΗ)+(ΒΕΖΑ)+(ΑΘΗΖ)$

$=5(10-x)+5x+5(10-x)+5x+x(10-x)=$

$=10(10-x)+10x+x(10-x)=$

$=100-10x+10x+10x-x^2=$

$=-x^2+10x+100,\quad 0<x<10$

Η συνάρτηση E(x) ως πολυωνυμική είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (0,10) με $E'(x)=-2x+10$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=5,\qquad E'(x)>0 \Rightarrow 0<x<5$

x	0		5		10
E′		+	0	−	
E		↗		↘	

Άρα για $x=5\,dm$ το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Δ2. α) Είναι $2s^2-5s+2=0 \Leftrightarrow s=2$ ή $s=\frac{1}{2}$

για $s=\frac{1}{2}$ είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{1}{16}<\frac{1}{10}$ δηλ. το δείγμα ομοιογενές, άτοπο

για $s=2$ είναι $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}>\frac{1}{10}$ δηλ. το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, άρα $s=2$

β) Είναι $s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-(\bar{x})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-8^2 \Leftrightarrow 68=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2$

άρα η μέση τιμή των x_i^2 είναι 68.

Δ3. $5=x_1<x_2<\ldots<x_{14}<x_{15}=9 \underset{\text{στο }[5,0)}{\overset{\eta\ E\ \gamma\nu.\varphi\theta.}{\Rightarrow}}$

$E(x_1)>E(x_2)>\ldots>E_{15} \Rightarrow y_1>y_2>\ldots>y_{15}$

Άρα $R=y_1-y_{15}=E(5)-E(9)=-25+50+100-(-81+90+100)=25-9=16$

Δηλαδή $y_i>-4x_i+9\cdot 16+1 \Leftrightarrow y_i>-4x_i-6,\ i=1,2,\ldots,15$

$-x_i^2+10x_i+100>-4x_i+145 \Leftrightarrow$

$x_i^2-14x_i+45<0 \Leftrightarrow x_i\in(5,9)$

Άρα $B=\{(x_2,y_2),(x_3,y_3),\ldots,(x_{14},y_{14})\},\ N(B)=13$

Επομένως από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας: $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{13}{15}$

Επιμέλεια:

ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ Μ. – ΝΤΡΙΤΣΟΣ Τ. – ΣΤΡΟΥΖΑΚΗΣ Δ.