

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

### ΣΟΣ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

#### ΖΗΤΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Να αποδείξετε ότι αν  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  τότε  $P(A \cup B) = (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$ . **(Μονάδες 12)**

Β. Τι ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων; **(Μονάδες 5)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές ή λάθος:

i) Για δύο ενδεχόμενα  $A, B$  ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A - B) = 0$ . **(Μονάδες 3)**

ii) Η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = \ln^3 x$  είναι  $f'(x) = \frac{3 \cdot \ln^2 x}{x}$ . **(Μονάδες 2)**

iii) Σε μια κανονική κατανομή  $\bar{x} > \delta$ . **(Μονάδες 3)**

#### ΖΗΤΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^3 + (\alpha - 2)x^2 + (\beta + 1)x - 8$ . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(1, f(1))$  είναι παράλληλη με την ευθεία  $y = 2x - 4$  και ισχύει  $f(1) = -2$

(α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = -4$  και  $\beta = 10$  **(Μονάδες 8)**

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f(x) + x$  δεν έχει ακρότατα. **(Μονάδες 8)**

(γ) Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x^2 - 1}$  **(Μονάδες 9)**

#### ΖΗΤΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + \bar{x} \cdot x^2 - 2Sx + 6$ , όπου  $\bar{x}$  η μέση τιμή και  $S$  η τυπική απόκλιση ενός δείγματος μεγέθους  $n$  με  $k$  τιμές. Αν ισχύει  $f(1) = 11$  και  $f'(1) = 25$ .

(i) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(Μονάδες 5)**

(ii) Αν  $\sum_{i=1}^k x_i v_i = 720$  να βρείτε το πλήθος  $n$  του δείγματος. **(Μονάδες 8)**

(iii) Να βρείτε το  $\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i$ . **(Μονάδες 6)**

(iv) Αν όλες οι τιμές του δείγματος αυξηθούν κατά 5 μονάδες και στη συνέχεια πολλαπλασιαστούν με 2 να βρείτε το τελικό CV. **(Μονάδες 6)**

#### ΖΗΤΗΜΑ 4<sup>ο</sup>

Για 100 φοιτητές που εξετάστηκαν σε ένα μάθημα 55 φοιτητές ήταν κορίτσια, 80 φοιτητές πέρασαν το μάθημα και 40 αγόρια πέρασαν το μάθημα. Αν επιλέγουμε ένα φοιτητή τυχαία να βρείτε τις πιθανότητες, ένας φοιτητής:

(α) i) Να είναι ένα κορίτσι και να πέρασε το μάθημα. **(Μονάδες 7)**

ii) Να είναι κορίτσι ή να μην πέρασε το μάθημα. **(Μονάδες 8)**

iii) Να είναι αγόρι ή να μην πέρασε το μάθημα. **(Μονάδες 5)**

(β) Πόσα κορίτσια δεν πέρασαν το μάθημα. **(Μονάδες 5)**

#### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΖΗΤΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. Απόδειξη Σχολικό Βιβλίο

B. Σχολικό Βιβλίο

Γ. Σωστό – Σωστό – Λάθος

#### ΖΗΤΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

(α) Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 3x^2 + 2(\alpha - 2)x + \beta + 1$

Ισχύει  $f'(x_0) = \lambda \Leftrightarrow f'(1) = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2(\alpha - 2) \cdot 1 + \beta + 1 = 2$

$3 + 2\alpha - 4 + \beta + 1 = 2 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 2$  (1)

Ισχύει  $f(1) = -2 \Leftrightarrow 1^3 + (\alpha - 2)1^2 + (\beta + 1) \cdot 1 - 8 = -2 \Leftrightarrow$

$$1 + \alpha - 2 + \beta + 1 - 8 = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε  $\alpha = -4, \beta = 10$

$$(β) \quad g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 8 + x = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Η  $g$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $g'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x-2)^2 \geq 0$ .

Άρα  $g'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και δεν έχει ακρότατα.

$$(γ) \quad \frac{f'(x) - f'(1)}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 - 12x + 11 - 2}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-3)}{x+1}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x^2 - 1} = \frac{3(1-3)}{1+1} = -3.$$

### ΖΗΤΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 3x^2 + 2x \cdot \bar{x} - 2S$ .

$$(i) \text{ Ισχύει: } f(1) = 11 \Leftrightarrow 1^3 + \bar{x} \cdot 1^2 - 2 \cdot S \cdot 1 + 6 = 11 \Leftrightarrow \bar{x} - 2S = 4 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης ισχύει: } f'(1) = 25 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \bar{x} - 2S = 2S \Leftrightarrow 2\bar{x} - 2S = 22$$

$$\text{Δηλαδή } \bar{x} - S = 11 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε  $S = 7$  και  $\bar{x} = 18$ .

$$(ii) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i}{v} \Leftrightarrow 18 = \frac{720}{v} \Leftrightarrow v = 40$$

(iii) ισχύει :

$$S^2 = \frac{1}{v} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\} \Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v^2} \Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \left( \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - \bar{x}^2 \Leftrightarrow 49 = \frac{1}{40} \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - 18^2 \Leftrightarrow 1960 = \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot v_i - 12.960 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i = 14.920$$

(iv) Από εφαρμογή  $\bar{x}' = \bar{x} + 5 = 18 + 5 = 23$

$$\bar{x}'' = \bar{x}' \cdot 2 = 46$$

$$S' = S = 7$$

$$S'' = S \cdot |2| = 14 \text{ Άρα } C_{v_{\text{τελ}}} = \frac{S''}{\bar{x}''} = \frac{14}{46} = 0,304$$

Δηλαδή  $C_{v_{\text{τελ}}} = 30,4\%$

#### ΖΗΤΗΜΑ 4<sup>ο</sup>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A: Ο φοιτητής να είναι κορίτσι.

B: Ο φοιτητής να πέρασε το μάθημα.

ισχύει:  $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{55}{100} = 0,55$  ,  $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{80}{100} = 0,80$

και  $P(B - A) = \frac{N(B - A)}{N(\Omega)} = \frac{40}{100} = 0,40$

(i) Ισχύει:  $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

Άρα  $P(A \cap B) = P(B) - P(B - A) = 0,80 - 0,40 = 0,40$

(ii)

$$\begin{aligned}P(A \cup B)' &= P(A) + P(B)' - P(A \cap B)' = P(A) + 1 - P(B) - P(A - B) \\&= P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 1 - P(B) + P(A \cap B) \\&= 1 - 0,80 + 0,40 = 0,60\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}P(A \cup B)' &= 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\&= 1 - 0,55 - 0,80 + 0,40 = 0,05\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}P(A - B) &= \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{N(A - B)}{N(\Omega)} \\&\Leftrightarrow 0,55 - 0,40 = \frac{N(A - B)}{100} \Leftrightarrow N(A - B) = 15\end{aligned}$$

### ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΙΔΙΚΟΤΕΡΑ

#### 1° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- 1) Εύρεση παραγώγων (λάθος στην παράγωγο σημαίνει και λάθος στην άσκηση).
- 2) Εφαπτομένη (Δίνεται ή όχι το σημείο επαφής).

#### 2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- 1) Κατανόηση τύπων και ποιος εξυπηρετεί κάθε φορά.
- 2) Προσοχή στις μονάδες (παγίδα)
- 3) Προσοχή στις πράξεις, υπάρχουν ασφαλιστικές δικλείδες για εντοπισμό λαθών στις πράξεις, να γίνεται επαλήθευση

#### 3° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

- 1) Κατανόηση ισοπίθανα – μη ισοπίθανα
- 2) Στα προβλήματα ορίζουμε με προσοχή τα ενδεχόμενα

#### ΓΕΝΙΚΑ

Πρώτα πρόχειρο – σχεδιάγραμμα λύσης αναλυτική διατύπωση μόνο στο καθαρό. Πολλές φορές την εκφώνηση. Αν κολλήσουμε πάμε σε άλλο θέμα και επανερχόμαστε.

**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΣΠΥΡΟΥ ΧΡΗΣΤΟΣ**