ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$. **Μονάδες 7**

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0; **Μονάδες 4**

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο; **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $|z-4| = 2|z-1|$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών Z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2. **Μονάδες 7**

Β2. Έστω $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1. Να αποδείξετε ότι:

ΠΕΙΡΑΙΑΣ: Αγ. Κωνσταντίνου 11 (5ος όροφος), τηλ.: 2104135221 thesmos2@otenet.gr
ΜΑΡΟΥΣΙ: Δ. Ράλλη 3 (1ος όροφος), τηλ.: 2106143508 thesmosmarousi@gmail.com
www.thesmos.edu.gr

α) Ο w είναι πραγματικός και (μονάδες 4)
β) $-4 \le w \le 4$. (μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w = -4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3, με $z_3 = 2iz_1$, είναι ισοσκελές. **Μονάδες 7**

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. **Μονάδες 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x} \cdot \left(x^2+1\right)\right) = \dfrac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα. **Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2xf(4x)$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 4**

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. **Μονάδες 7**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)} + e^{-f(x)}\right] = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. **Μονάδες 5**

Δ2. **α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$. (μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln\left|f(x)\right|\right]$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt}{x-3}+\dfrac{8-3\int_0^{x} f^2\left(t\right)dt}{x-2}=0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3). **Μονάδες 7**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 194.
Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 188.
Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 259.
Α4. $\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Lambda$, $\delta \to \Sigma$, $\varepsilon \to \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $|z-4|=2|z-1|$

άρα $|z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow z\bar{z}=4$ άρα $|z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2.$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα 2.

Β2. α) Οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω κύκλο,

άρα $|z_1|=2 \Leftrightarrow |z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{4}{z_1}$

και $|z_2|=2 \Leftrightarrow |z_2|^2=4 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2=4 \Leftrightarrow \bar{z}_2=\dfrac{4}{z_2}.$

Είναι $\bar{w}=2\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+2\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=2\dfrac{\cancel{4}/z_1}{\cancel{4}/z_2}+2\dfrac{\cancel{4}/z_2}{\cancel{4}/z_1}=2\dfrac{z_2}{z_1}+2\dfrac{z_1}{z_2}=w$

αφού $w=\bar{w}$ ο w είναι πραγματικός αριθμός
(γιατί $w=\bar{w} \Leftrightarrow w-\bar{w}=0 \Leftrightarrow 2i\,\mathrm{Im}\,w=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,w=0 \Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$).

<u>2ος τρόπος</u>

Είναι $w=2z_1\dfrac{1}{z_2}+2\dfrac{z_2}{z_1}=2z_1\dfrac{\bar{z}_2}{4}+2z_2\dfrac{\bar{z}_1}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\left(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\right)=\dfrac{1}{2}\left(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}\right)=\dfrac{1}{2}2\,\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)=\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)$

Άρα ο $w\in\mathbb{R}$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $-4 \le w \le 4 \overset{w\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} |w| = 4$

$$\Leftrightarrow \left|2\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right| \le 2.$$

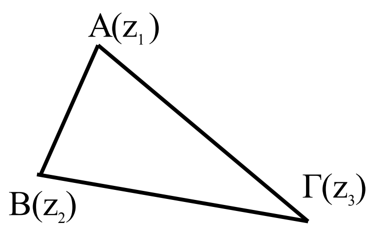
Είναι από την τριγωνική ανισότητα

$$\left|\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}+\frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{2}{2}+\frac{2}{2} = 2.$$

Β3. Αν $w = -4$ τότε $-4 = 2\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right) \Leftrightarrow -2 = \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)^2 = 0.$$

Άρα $z_1 = -z_2$ (1)



$$\left(AB\right) = |z_1 - z_2| \overset{(1)}{=} |-2z_2| = 2|z_2| = 4.$$

$$\left(A\Gamma\right) = |z_1 - z_3| = |z_2 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| = |z_1|\sqrt{1+4} = 2\sqrt{5}.$$

$$\left(B\Gamma\right) = |z_3 - z_2| = |2iz_1 + z_1| = |z_1(1+2i)| = |z_1||1+2i| = 2\sqrt{5}.$$

Είναι (ΑΓ)=(ΒΓ) άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Είναι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Η f ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων (εκθετικής, πολυωνυμικής) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - e^x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = e^x\frac{\left(x-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	+	
f		↗		↗	

Για $x \in (-\infty, 1)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f συνεχής στο $\left(-\infty, 1\right]$.

Για $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f συνεχής στο $\left[1,+\infty\right)$. Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.

Επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεχής, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)\right) = \left(0,+\infty\right)$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} \cdot e^x = 0$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$

Γ2. Είναι $\dfrac{e^2}{5} = f\left(2\right)$, άρα η εξίσωση γίνεται

$f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right) = f\left(2\right) \underset{\text{άρα } 1-1}{\overset{f\uparrow \text{ στο } \mathbb{R}}{\Leftrightarrow}} e^3 \cdot e^{-x}\left(x^2+1\right) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{e^x} = \dfrac{2}{e^3} \Leftrightarrow f\left(x\right) = \dfrac{e^3}{2}$.

Η f στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Το $x_0 = \dfrac{e^3}{2} \in \left(0,+\infty\right)$, που είναι το σύνολο τιμών της.

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ3. Είναι $\int_{2x}^{4x} f\left(t\right)dt < 2xf\left(4x\right)$, $x > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\int_{2x}^{4x} f\left(t\right)dt}{2x} < f\left(4x\right) \Leftrightarrow \dfrac{\int_{\alpha}^{4x} f\left(t\right)dt - \int_{\alpha}^{2x} f\left(t\right)dt}{2x} < f\left(4x\right)$, $x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa\left(\alpha\right) = \int_{\alpha}^{u} f\left(t\right)dt$, $u \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα ορίζεται στο $\mathbb{R}$

η κ και είναι παραγωγίσιμη με $\kappa'\left(u\right) = f\left(u\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η κ στο διάστημα $\left[2x, 4x\right] \subseteq \left(0,+\infty\right)$ ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής.

Στο (2x,4x) είναι παραγωγίσιμη.

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(2x, 4x\right)$ ώστε

$$\kappa'\left(x_0\right) = \frac{\kappa\left(4x\right) - \kappa\left(2x\right)}{4x - 2x} \Rightarrow f\left(x_0\right) = \frac{\int_{\alpha}^{4x} f\left(t\right)dt - \int_{\alpha}^{2x} f\left(t\right)dt}{2x} \quad (1)$$

Είναι $2x < x_0 < 4x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(2x\right) < f\left(x_0\right) < f\left(4x\right) \quad (2)$

$$(2)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{\int_\alpha^{4x}f(t)dt-\int_\alpha^{2x}f(t)dt}{2x}<f(4x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\int_\alpha^{4x}f(t)dt-\int_\alpha^{2x}f(t)dt<2xf(4x)$$

$$\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf(4x),\ \ x>0$$

<u>$2^{\text{ος}}$ τρόπος</u>

Είναι για κάθε x με $0<2x<t<4x\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(t)<f(4x)$

Άρα $\int_{2x}^{4x}f(t)dt<\int_{2x}^{4x}f(4x)dt\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<f(4x)\left[t\right]_{2x}^{4x}$

$\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf(4x),\ \ x>0.$

Γ4. Από το ερώτημα Γ3 είναι $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\left(\kappa(4x)-\kappa(2x)\right), & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$

Για $x>0$ η g ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$g(x)=\frac{\left[\kappa'(4x)\cdot 4-\kappa'(2x)\cdot 2\right]x-\left[\kappa(4x)-\kappa(2x)\right]}{x^2}$$

$$=\frac{\left(4f(4x)-2f(2x)\right)x-\left[\int_\alpha^{4x}f(t)dt-\int_\alpha^{2x}f(t)dt\right]}{x^2}$$

$$=\frac{2\left[2f(4x)-f(2x)\right]x-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}$$

$$=\frac{\left[2f(4x)-f(2x)-\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}\right]2x}{x^2}>0$$

γιατί από το Γ3 ερώτημα, σχέση (2), έχω: $f(2x)<\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}<f(4x)$

άρα $f(4x)-f(2x)>0$ και $f(4x)-\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}>0$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}\overset{f\ \text{συν.}}{=}$$

$$=4f(0)-2f(0)=2f(0)=2=g(0)$$

Άρα η g συνεχής στο $\left[0,+\infty\right)$, $g'>0$ στο $\left(0,+\infty\right)$.

Επομένως η g γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' - \left(e^{-f(x)}\right)' = 2$

$\Leftrightarrow \left[e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right]' = (2x)'$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από συνέπεια θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ δίνει $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c = 0$.

Επομένως $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow \frac{e^{f^2(x)} - 1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow e^{f^2(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - x\right)^2 = x^2 + 1,\quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Έστω $H(x) = e^{f(x)} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε $H^2(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ (2)

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $H(x_0) = 0$.

Η (2) για $x = x_0$ δίνει: $0 = x^2 + 1$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Επομένως $H(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεχής, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Όμως $H(0) = e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$, δηλαδή $H(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$(2) \Rightarrow H(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

δηλαδή $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Είναι $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2 + 1} > -x \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} x > 0, \text{ ισχύει} \\ x \leq 0,\ x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0, \text{ ισχύει} \end{array}\right.$$

Δ2. α) Η f ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f' ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \left[\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}},\ x \in \mathbb{R}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$
f			

Είναι $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.

Η f' συνεχής στο $(-\infty, 0]$, άρα η f' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, δηλαδή η f κυρτή στο $(-\infty, 0]$.

Και $f''(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$, η f' συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα η f' γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, δηλαδή η f κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Στο $x_0 = 0$ ως παραγωγίσιμη η f δέχεται εφαπτομένη, άρα το σημείο $\left(0, f(0) = 0\right)$, δηλαδή η αρχή των αξόνων, είναι Σημείο Καμπής της f.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης στην C_f στο Σ.Κ. είναι

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x$.

Η f στο [0,1] είναι συνεχής και κοίλη, άρα $f(x) \le \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow f(x) \le x$

(η ισότητα ισχύει στο σημείο επαφής, δηλαδή για $x = 0$).

Έστω $\Lambda(x) = f(x) - x,\ x \in [0,1]$

Η Λ συνεχής στο [0,1] και $\Lambda(x) \le 0$, άρα

$$E = \int_0^1 \left|\Lambda(x)\right| dx = \int_0^1 \left(x - f(x)\right) dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \int_0^1 (x)' f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \left[x f(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x \cdot f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ τ.μ.}$$

Δ3. Είναι $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) = 0$

άρα $\lim_{x\to 0^+}\left[\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)} f(x)\ln f(x)\right] = 0$

γιατί $\lim_{x\to o^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)} \underset{DLH}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)} = 0$

αφού $\lim_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)dt} = e^0 = 1,\quad \lim_{x\to o^+} f^2(x) \overset{f\text{ συν.}}{=} f(0) = 0$

και $\lim_{x\to 0^+} f'(x) \overset{f'\text{ συν.}}{=} f'(0) = 1$ και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln f(x) \overset{0(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \underset{\substack{\text{στο } x\to 0^+\\ \text{το } u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}} = \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\dfrac{1}{u}} \underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{u\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{u}}{\dfrac{-1}{u^2}} = \lim_{u\to 0^+}(-u) = 0$$

Δ4. Θεωρώ τη συνάρτηση

$\Lambda(x) = (x-2)\left[1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right] + (x-3)\left[8-3\int_0^x f^2(t)dt\right]$ για $x[2,3]$.

Η Λ είναι ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχής στο [2,3].

$\Lambda(2) = 3\int_0^2 f^2(t)dt - 8$ και $\Lambda(3) = 1-3\int_0^1 f^2(t)dt$

Είναι από το Δ2β ερώτημα για κάθε $t \in [0,2]$: $0 \le f(t) \le t \Rightarrow f^2(t) \le t^2$

(η ισότητα μόνο για $t = 0$)

άρα $\int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2 dt = \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{8}{3}$

άρα $3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 < 0$, δηλαδή $\Lambda(2) < 0$

και για κάθε $t \in [0,1]$: $0 < f(t^2) \le t^2$ (η ισότητα μόνο για $t = 0$)

άρα $\int_0^1 f^2(t)dt < \int_0^1 t^2 dt = \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

άρα $3\int_0^1 f^2(t)dt < 1 \Leftrightarrow 1-3\int_0^1 f^2(t)dt > 0 \Leftrightarrow \Lambda(3) > 0.$

Επομένως $\Lambda(2)\Lambda(3) < 0.$

Εφαρμόζεται για τη Λ στο [2,3] το θεώρημα Bolzano, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ ώστε $\Lambda(x_0) = 0$.

Επιμέλεια:
Σ. ΚΟΥΤΣΟΥΒΕΛΗΣ – Π. ΛΥΓΚΩΝΗΣ – Μ. ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ
Δ. ΣΤΡΟΥΖΑΚΗΣ – Δ. ΝΤΖΟΥΡΟΠΑΝΟΣ