# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

## ΘΕΜΑΤΑ

### ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

**Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

**Α3.** Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, ..., w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ. **Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο $(\alpha, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0,\beta)$, τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$.

**β.** Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

**γ.** Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

**δ.** Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων Α και Β ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα Β εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα Α.

**ε.** Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β» δηλώνει ότι $A\subseteq B$.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Έστω Α, Β και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, $A\cap B$ και $A\cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2-3x-2=0.$$

**Β1.** Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. **Μονάδες 5**

**Β2.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A'-B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».
**Μονάδες 10**

**Β3.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β». **Μονάδες 6**

**Β4.** Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα. **Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%, i=1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι:

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην $3^η$ κλάση είναι 108°.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=14$.

| Κλάσεις | $f_i\%$ |
|---|---|
| [8,10) | |
| [10,12) | |
| [12,14) | |
| [14,16) | |
| [16,18) | |

**ΠΙΝΑΚΑΣ Ι**

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.
**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές. Δίνεται ότι $\sqrt{6,6}\simeq 2,57$. **Μονάδες 7**

**Γ3.** Έστω $x_1, x_2, x_3$ και $x_4$ τα κέντρα της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα και $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ και $\nu_4$ οι συχνότητες της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i = 1780$, βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.
**Μονάδες 5**

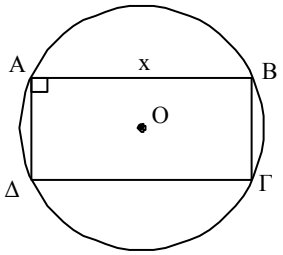
**Γ4.** Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και $S_\alpha$ την τυπική τους απόκλιση. Εάν

$\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για $i = 1, 2, 3, 4, 5,$ να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος $\beta_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση $S_\beta$ είναι ίση με 1.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 5$ και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB = x,$ όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.




**ΣΧΗΜΑ Ι**

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10.$ **Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. **Μονάδες 5**

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$. **Μονάδες 8**

**Δ4.** Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν $P(A - B) > 0,$ να δείξετε ότι $f\left(\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \le f\left(\dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$. **Μονάδες 8**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 31
**Α2.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 22
**Α3.** Θεωρία σχολικό βιβλίο σελ. 86-87.
**Α4.** α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Είναι $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ \text{ή} \\ 8x^2-6x+1=0 \quad \Delta=36-32=4 \end{cases}$

άρα $x_1, x_2 = \dfrac{6\pm 2}{16} \left[ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ \text{ή} \\ x_2 = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} \end{array} \right.$

Όμως $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B$ άρα $P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$.

Επομένως $P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}, P(A)=\dfrac{1}{3}, P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$

**Β2.** Είναι $P(A'-B')=P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

$= P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$= P(A\cup B)-P(A)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

$\left( \begin{array}{l} \text{ή } P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=P(A')-P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A)-1+P(A\cup B)= \\ P(A\cup B)-P(A)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6} \end{array} \right)$

και $P(\Delta)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\cup(A'\cap B')\right]$

$= P(A-B)+P(B-A)+P\left[(A\cup B)'\right]$

$= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)+1-P(A\cup B)$

$= 1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

**Β3.** $P(E)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]$

$= P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$

$= P(A\cup B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

**Β4.** Είναι από τον προσθετικό νόμο

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow P(B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$

και η εξίσωση $9x^2-3x-2=0$ έχει $\Delta = 9 + 72 = 81$

άρα $x_1, x_2 = \frac{3 \pm 9}{18} = \begin{cases} \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \\ ή \\ \frac{-6}{18} = \frac{-1}{3} < 0 \ \ απορρίπτεται \end{cases}$

Επομένως $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$

Υποθέτουμε ότι τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα δηλαδή $B \cap \Gamma = \varnothing$ τότε

$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5+8}{12} = \frac{13}{12} > 1$

άτοπο γιατί $0 \le P(\mathrm{B} \cup \Gamma) \le 1$

Επομένως τα ενδεχόμενα Β, Γ <u>δεν</u> είναι ασυμβίβαστα

## <u>ΘΕΜΑ Γ</u>

**Γ1.** Είναι $f_1\% = 10,\ f_5\% = 30, \alpha_3 = 108^o \Leftrightarrow 360^o \cdot f_3 = 108^o$

$\Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} = 0,3$ δηλαδή $f_3\% = 30$ και

$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14 (1)$

Όμως $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1$

$\Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0,3 \Leftrightarrow f_2 = 0,3 - f_4 (2)$

$(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0,9 + 11(0,3 - f_4) + 3,9 + 15 f_4 + 5,1 = 14$

$\Leftrightarrow 0,9 + 3,3 + 4 f_4 + 9 = 14$

$\Leftrightarrow 4 f_4 = 0,8 \Leftrightarrow f_4 = 0,2$ και $\Leftrightarrow f_2 = 0,3 - 0,2 = 0,1$

**Γ2.**

| ΚΛΑΣΕΙΣ | Κεντρικές τιμές $x_i$ | $f_i$ | $f_i\%$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [8,10) | 9 | 0,1 | 10 | -5 | 25 | 2,5 |
| [10,12) | 11 | 0,1 | 10 | -3 | 9 | 0,9 |
| [12,14) | 13 | 0,3 | 30 | -1 | 1 | 0,3 |
| [14,16) | 15 | 0,2 | 20 | 1 | 1 | 0,2 |
| [16,18) | 17 | 0,3 | 30 | 3 | 9 | 2,7 |
| ΣΥΝΟΛΟ | | 1 | 100 | | | 6,6 |

Είναι η διακύμανση $s^2$ του δείγματος

$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \nu_i = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \frac{\nu_i}{\nu} = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 f_i = 6,6$

Επομένως η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$

Άρα CV = $\frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} \simeq 0,18 > 0,1$ άρα το δείγμα των παρατηρήσεων <u>δεν</u> είναι ομοιογενές.

**Γ3.** Είναι $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4 + x_5\nu_5}{\nu} = 14 (1)$

Όμως $\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1780(2)$ και $f_5 = 0,3 \Leftrightarrow v_5 = 0,3v(3)$

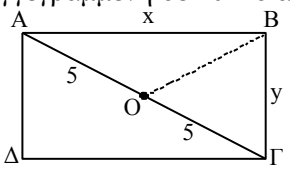
Άρα η (1) από (2) και (3) δίνει $1780 + 17 \cdot 0,3v = 14v \Leftrightarrow v = 200$

**Γ4.** Είναι $\beta_i = \frac{1}{s_a}\alpha_i - \frac{\bar{a}}{s_\alpha}, \mathrm{i} = 1,2,3,4,5$

Άρα $\bar{\beta} = \frac{1}{s_\alpha}\bar{a} - \frac{\bar{a}}{s_\alpha} = 0$ και $s_\beta = \left|\frac{1}{s_\alpha}\right| \cdot s_\alpha = 1$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι η γωνία $\hat{\mathrm{B}} = 90°$ και εγγεγραμμένη σε κύκλο άρα βαίνει σε ημικύκλιο.



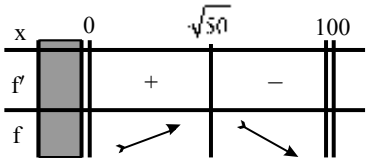

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ
ΑΒ = x
ΒΓ = y
ΑΓ = 2ρ = 10
Επομένως με εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος είναι
$y^2 = 10^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$
Το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x είναι
$f(x) = E = x \cdot y = x\sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10$.

**Δ2.** Η f ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (0, 10)

με $f'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, 0 < x < 10$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 = 2x^2 \overset{0<x<10}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{50}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \sqrt{50}\right)$




Επομένως όταν $x = \sqrt{50}$ το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο και ίσο με $f(50)$ τότε $y = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50}$ άρα το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

**Δ3.** Είναι $f(1) = \sqrt{99}$

Άρα $\lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \frac{1}{98}\lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$

$= \frac{1}{98} f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$.

**Δ4.** Είναι $A - B \subseteq A$ άρα $P(A - B) \le P(A)$

δηλαδή $0 < P(A-B) \le P(A) \le 1$ (γιατί $A-B \ne \varnothing$ άρα $P(A-B) \ne 0$)

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \sqrt{50}\right]$ άρα

$$f\left[P(A-B)\right] \le f\left[P(A)\right] \Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)} \le P(A)\sqrt{100-P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$$

γιατί $\sqrt{100-P^2(A)} > 0$ και $\sqrt{100-P^2(A-B)} > 0.$

Είναι $0 \le P(A-B) \le 1$ άρα $P^2(A-B) \le 1$

$$\Leftrightarrow -P^2(A-B) \ge -1 \Leftrightarrow 100-P^2(A-B) \ge 99$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}.$$

Όμως $0 \le P(A) \le 1$ άρα $\dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \le \dfrac{1}{\sqrt{99}} < 1$

δηλαδή $\dfrac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \dfrac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} < 1.$

Η f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \sqrt{50}\right]$ άρα

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

***Επιμέλεια:***
**ΣΙΜΙΤΖΟΓΛΟΥ Μ. – ΛΥΓΚΩΝΗΣ Π. – ΚΟΥΤΣΟΥΒΕΛΗΣ Σ.**